NFT I — Exercise 3 / Übung 3

RM/WS 02/03

Exercise 7 Derive the following FIT approximations for a dual–orthogonal grid system of rectangular or cubic grid cells / Leiten Sie die folgenden FIT–Approximationen für ein dual–orthogonales Gittersystem aus rechteckförmigen oder kubischen Gitterzellen ab:

- 1–D integral — curve integral / 1D–Integral — Kurvenintegral

$$\int\limits_{x=x_0}^{x_0+\Delta x} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x = f\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x + \mathcal{O}\left[(\Delta x)^3\right] \tag{7.1}$$

- 2–D integral — surface integral / 2D–Integral — Flächenintegral
  - rectangular grid cell / rechteckförmige Gitterzelle

$$\int\limits_{x=x_0}^{x_0+\Delta x}\int\limits_{y=y_0}^{y_0+\Delta y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = f\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}, y_0+\frac{\Delta y}{2}, z\right)\Delta x\Delta y + \mathcal{O}\left[(\Delta x)^3\Delta y + \Delta x(\Delta y)^3\right] \tag{7.2}$$

  - cubic grid cell / kubische Gitterzelle

$$\int\limits_{x=x_0}^{x_0+\Delta x}\int\limits_{y=y_0}^{y_0+\Delta x} f(x,y,z)\,dx\,dy = f\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}, y_0+\frac{\Delta x}{2}, z\right)\Delta x\Delta y + \mathcal{O}\left[(\Delta x)^4\right] \tag{7.3}$$

- 3–D integral — volume integral / 3D–Integral — Volumenintegral
  - rectangular grid cell / rechteckförmige Gitterzelle

$$\begin{aligned}\int\limits_{x=x_0}^{x_0+\Delta x}\int\limits_{y=y_0}^{y_0+\Delta y}\int\limits_{z=z_0}^{z_0+\Delta z} & f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= f\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}, y_0+\frac{\Delta y}{2}, z_0+\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta x\Delta y\Delta z \\ &\quad + \mathcal{O}\left[(\Delta x)^3\Delta y\Delta z + \Delta x(\Delta y)^3\Delta z + \Delta x\Delta y(\Delta z)^3\right]\end{aligned} \tag{7.4}$$

  - cubic grid cell / kubische Gitterzelle

$$\int\limits_{x=x_0}^{x_0+\Delta x}\int\limits_{y=y_0}^{y_0+\Delta y}\int\limits_{z=z_0}^{z_0+\Delta z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = f\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}, y_0+\frac{\Delta x}{2}, z_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x\Delta y\Delta z + \mathcal{O}\left[\left(\Delta x^5\right)\right] \tag{7.5}$$

Hint: The first three terms of the two–dimensional Taylor series expansion of the function $f(x,y)$ at the position $\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}, y_0+\frac{\Delta y}{2}\right)$ read / Hinweis: Die ersten drei Terme der zweidimensionalen Taylor–Reihenentwicklung der Funktion $f(x,y)$ an der Stelle $\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}, y_0+\frac{\Delta y}{2}\right)$

lauten /

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = f &\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta y}{2}\right) \\
&+ f^{(x)}\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta y}{2}\right)\left[x - \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\right] \\
&+ f^{(y)}\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta y}{2}\right)\left[y - \left(y_0 + \frac{\Delta y}{2}\right)\right] \\
&+ f^{(xx)}\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta y}{2}\right)\frac{1}{2}\left[x - \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\right]^2 \\
&+ f^{(xy)}\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta y}{2}\right)\left[x - \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\right]\left[y - \left(y_0 + \frac{\Delta y}{2}\right)\right] \\
&+ f^{(yy)}\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta y}{2}\right)\frac{1}{2}\left[y - \left(y_0 + \frac{\Delta y}{2}\right)\right]^2 + \mathcal{H}OT\,. \qquad (7.6)
\end{aligned}
$$

Hint: The first three terms of the three–dimensional Taylor series expansion of the function $f(x,y,z)$ at the position $\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0 + \frac{\Delta z}{2}\right)$ read / Hinweis: Die ersten drei Terme der dreidimensionalen Taylor–Reihenentwicklung der Funktion $f(x,y,z)$ an der Stelle $\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0 + \frac{\Delta z}{2}\right)$ lauten /

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) = f &\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0 + \frac{\Delta z}{2}\right) \\
&+ f^{(1)}\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0 + \frac{\Delta z}{2}\right)\left[x - \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\right] \\
&+ f^{(2)}\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0 + \frac{\Delta z}{2}\right)\left[y - \left(y_0 + \frac{\Delta y}{2}\right)\right] \\
&+ f^{(3)}\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0 + \frac{\Delta z}{2}\right)\left[z - \left(z_0 + \frac{\Delta z}{2}\right)\right] \\
&+ f^{(11)}\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0 + \frac{\Delta z}{2}\right)\frac{1}{2}\left[x - \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\right]^2 \\
&+ f^{(22)}\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0 + \frac{\Delta z}{2}\right)\frac{1}{2}\left[y - \left(y_0 + \frac{\Delta y}{2}\right)\right]^2 \\
&+ f^{(33)}\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0 + \frac{\Delta z}{2}\right)\frac{1}{2}\left[z - \left(z_0 + \frac{\Delta z}{2}\right)\right]^2 \\
&+ f^{(12)}\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0 + \frac{\Delta z}{2}\right)\left[x - \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\right]\left[y - \left(y_0 + \frac{\Delta y}{2}\right)\right] \\
&+ f^{(13)}\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0 + \frac{\Delta z}{2}\right)\left[x - \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\right]\left[z - \left(z_0 + \frac{\Delta z}{2}\right)\right] \\
&+ f^{(23)}\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0 + \frac{\Delta z}{2}\right)\left[y - \left(y_0 + \frac{\Delta y}{2}\right)\right]\left[z - \left(z_0 + \frac{\Delta z}{2}\right)\right] \\
&+ \mathcal{H}OT\,. \qquad (7.7)
\end{aligned}
$$

We use the following short–hand notation / Wir verwenden die folgende abkürzende Schreibweise:

$$
\frac{\partial f}{\partial x} = f^{(x)} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial xy} = f^{(xy)} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f^{(xx)} \qquad \text{etc.} \qquad (7.8)
$$

Exercise 8 Derive the discrete grid equations for the Cartesian components $\mathrm{B}_y^{(n)}(t)$ and $\mathrm{B}_z^{(n)}(t)$ of the discrete Faraday's induction law. Follow the same derivation as presented in the lecture. / Leiten Sie analog zur Vorlesung die diskreten Gittergleichungen für die Kartesischen Komponenten $\mathrm{B}_y^{(n)}(t)$ und $\mathrm{B}_z^{(n)}(t)$ des diskreten Faradayschen Induktionsgesetzes ab.

1. Governing equations in integral form / Grundgleichungen in Integralform
2. Sketch of the allocation of the discrete Cartesian components / Skizze der Allokation der diskreten Kartesischen Komponenten
3. FIT approximation of the surface integrals / FIT–Approximation der Flächenintegrale
4. FIT approximation of the closed curve integral / FIT–Approximation des geschlossenen Kurvenintegrals
5. Local matrix form / Lokale Matrixform
6. Global matrix form / Globale Matrixform

Exercise 9 Derive the discrete grid equations for the Cartesian components $\mathrm{E}_y^{(n)}(t)$ and $\mathrm{E}_z^{(n)}(t)$ of the discrete Ampère–Maxwell circuital law. Follow the same derivation as presented in the lecture. / Leiten Sie analog zur Vorlesung die diskreten Gittergleichungen für die Kartesischen Komponenten $\mathrm{E}_y^{(n)}(t)$ und $\mathrm{E}_z^{(n)}(t)$ des diskreten Ampère–Maxwellschen Durchflutungsgesetzes ab.

1. Governing equations in integral form / Grundgleichungen in Integralform
2. Sketch of the allocation of the discrete Cartesian components / Skizze der Allokation der diskreten Kartesischen Komponenten
3. FIT approximation of the surface integrals / FIT–Approximation der Flächenintegrale
4. FIT approximation of the closed curve integral / FIT–Approximation des geschlossenen Kurvenintegrals
5. Local matrix form / Lokale Matrixform
6. Global matrix form / Globale Matrixform

Exercise 10 Derive the discrete grid equations for the Cartesian field components for the 2–D TE case $(\mathrm{B}_y^{(n)}(t), \mathrm{E}_x^{(n)}(t), \mathrm{E}_z^{(n)}(t))$ and 2–D TM case $(\mathrm{E}_y^{(n)}(t), \mathrm{B}_x^{(n)}(t), \mathrm{B}_z^{(n)}(t))$. / Leiten Sie die diskreten Gittergleichungen für die Kartesischen Feldkomponenten für den 2D–TE– und 2D–TM–Fall ab.

1. Consider the inhomogeneous case. / Betrachte den inhomogenen Fall.
2. Consider the homogeneous case and compare the resulting discrete FIT equations to the discrete FDTD equations. / Betrachte den homogenen Fall und vergleiche die resultierenden diskreten FIT–Gleichungen mit den diskreten FDTD–Gleichungen.

Exercise 11 Derive the discrete grid equations for the Cartesian field components for the 1–D case $(\mathrm{B}_y^{(n)}(t), \mathrm{E}_x^{(n)}(t)$. / Leiten Sie die diskreten Gittergleichungen für die Kartesischen Feldkomponenten für den 1D–Fall $(\mathrm{B}_y^{(n)}(t), \mathrm{E}_x^{(n)}(t)$ ab.

1. Consider the inhomogeneous case. / Betrachte den inhomogenen Fall.

2. Consider the homogeneous case and compare the resulting discrete FIT equations to the discrete FDTD equations. / Betrachte den homogenen Fall und vergleiche die resultierenden diskreten FIT–Gleichungen mit den diskreten FDTD–Gleichungen.