Numerical Methods of Electromagnetic Field Theory I (NFT I) Numerische Methoden der Elektromagnetischen Feldtheorie I (NFT I) /

11th Lecture / 11. Vorlesung

Dr.-Ing. René Marklein
marklein@uni-kassel.de
http://www.tet.e-technik.uni-kassel.de
http://www.uni-kassel.de/fb16/tet/marklein/index.html

Universität Kassel
Fachbereich Elektrotechnik / Informatik
(FB 16)
Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik
(FG TET)
Wilhelmshöher Allee 71
Büro: Raum 2113 / 2115
D-34121 Kassel

University of Kassel
Dept. Electrical Engineering / Computer Science (FB 16)
Electromagnetic Field Theory
(FG TET)
Wilhelmshöher Allee 71
Office: Room 2113 / 2115
D-34121 Kassel

FD Method - Properties / FD-Methode - Eigenschaften

- Spatial and Temporal Discretization / Räumliche und zeitliche Diskretisierung $\boxed{\begin{array}{l}\Delta z = ?\\ \Delta t = ?\end{array}}$
- Consistency / Konsistenz
- Dispersion / Dispersion
- Stability Condition / Stabilitätsbedingung $\boxed{\Delta t = f(\Delta z)}$
- Convergence / Konvergenz

Analytical and Numerical Dispersion Relation
Analytische und Numerische Dispersionsrelation

Dispersion relation for a plane wave propagation in 1-D und 3-D: /
Dispersionsrelation für die Ausbreitung einer ebenen Welle in 1D und 3D

$$\text{1D: } E_x(z,t) = E_0(\omega_0,\hat{\underline{\mathbf{k}}})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega_0 t - k_z z)}$$

$$\text{3D: } \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{R}},t) = E_0(\omega_0,\hat{\underline{\mathbf{k}}})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega_0 t - \underline{\mathbf{k}}\bullet\underline{\mathbf{R}})}$$

where k_z is the z component of the wave vector $\underline{\mathbf{k}}$ /
wobei k_z die z-Komponente des Wellenvektors $\underline{\mathbf{k}}$ ist

$$\text{1D: } \underline{\mathbf{k}} = k_z \underline{\mathbf{e}}_z$$

$$\text{3D: } \underline{\mathbf{k}} = k_x \underline{\mathbf{e}}_x + k_y \underline{\mathbf{e}}_y + k_z \underline{\mathbf{e}}_z$$

with magnitude / mit dem Betrag

$$\text{1D: } |\underline{\mathbf{k}}| = k = \sqrt{\underline{\mathbf{k}}\bullet\underline{\mathbf{k}}} = \sqrt{k_z^2} = |k_z|$$

$$\text{3D: } |\underline{\mathbf{k}}| = k = \sqrt{\underline{\mathbf{k}}\bullet\underline{\mathbf{k}}} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

Insert the plane wave ansatz into the scalar 1-D and vector 3-D wave equation /
Setze den ebenen Wellenansatz in die skalare 1D und vektorielle 3D Wellengleichung ein

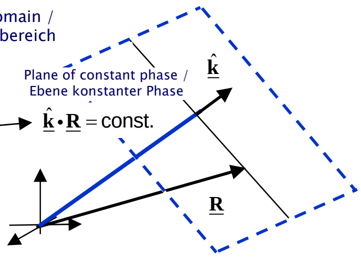
$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x(z,t) - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x(z,t) = 0$$

$$\Delta \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{R}},t) - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{R}},t) = 0$$

Derivation of the Stability Condition for the 1-D FD Scheme of 2nd Order /
Ableitung der Stabilitätsbedingung für das 1D-FD-Schema 2ter Ordnung

Complex Monofrequent (monochromatic) plane wave in the time domain /
Komplexe monofrequente (monochromatische) ebene Welle im Zeitbereich

$$E_x(\underline{\mathbf{R}},t) = E_0(\omega_0,\hat{\underline{\mathbf{k}}})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\omega_0 t - k\hat{\underline{\mathbf{k}}}\bullet\underline{\mathbf{R}}\right)}$$
$$= E_0(\omega_0,\hat{\underline{\mathbf{k}}})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\hat{\underline{\mathbf{k}}}\bullet\underline{\mathbf{R}}}$$



Wave vector / Wellenvektor	$\underline{\mathbf{k}} = \mathrm{k}_x \underline{\mathbf{e}}_x + \mathrm{k}_z \underline{\mathbf{e}}_z + \mathrm{k}_z \underline{\mathbf{e}}_z = \mathrm{k}_z \underline{\mathbf{e}}_z$
Magnitude of the wave vector / Betrag des Wellenvektors	$\lvert\underline{\mathbf{k}}\rvert = \sqrt{\underline{\mathbf{k}}\bullet\underline{\mathbf{k}}} = \sqrt{\mathrm{k}_x^2 + \mathrm{k}_y^2 + \mathrm{k}_z^2} = \sqrt{\mathrm{k}_z^2} = \lvert k_z\rvert = k$
Wavenumber / Wellenzahl	$k = \dfrac{\omega_0}{c}$
Circular frequency / Kreisfrequenz	$\omega_0 = 2\pi f_0$
Propagation direction / Ausbreitungsrichtung	$\hat{\underline{\mathbf{k}}} = \dfrac{\underline{\mathbf{k}}}{\lvert\underline{\mathbf{k}}\rvert} = \dfrac{\mathrm{k}_z \underline{\mathbf{e}}_z}{\lvert\mathrm{k}_z\rvert} = \dfrac{\mathrm{sgn}(\mathrm{k}_z)\lvert\mathrm{k}_z\rvert \underline{\mathbf{e}}_z}{k} = \dfrac{\mathrm{sgn}(\mathrm{k}_z) k \underline{\mathbf{e}}_z}{k} = \mathrm{sgn}(\mathrm{k}_z)\underline{\mathbf{e}}_z$
Phase of the plane wave / Phase der ebenen Welle	$k\hat{\underline{\mathbf{k}}}\bullet\underline{\mathbf{R}} = k\,\mathrm{sgn}(\mathrm{k}_z)\underline{\mathbf{e}}_z\bullet(x\underline{\mathbf{e}}_x + y\underline{\mathbf{e}}_z + z\underline{\mathbf{e}}_z) = k\,\mathrm{sgn}(\mathrm{k}_z) z \underline{\mathbf{e}}_z\bullet\underline{\mathbf{e}}_z = k\,\mathrm{sgn}(\mathrm{k}_z) z$

Analytical and Numerical Dispersion Relation
Analytische und Numerische Dispersionsrelation

We compute / Wir berechnen

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x(z,t) - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x(z,t) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_0(\omega_0,\underline{\hat{\mathbf{k}}})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega_0 t - k_z z)} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} E_0(\omega_0,\underline{\hat{\mathbf{k}}})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega_0 t - k_z z)} = 0$$

$$(\mathrm{j}k_z)^2 E_0(\omega_0,\underline{\hat{\mathbf{k}}})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega_0 t - k_z z)} - \frac{1}{c_0^2}(\mathrm{j}\omega_0)^2 E_0(\omega_0,\underline{\hat{\mathbf{k}}})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega_0 t - k_z z)} = 0$$

$$\underbrace{\left[-k_z^2 + \frac{\omega_0^2}{c_0^2}\right]}_{\text{Dispersion relation / Dispersionsrelation}} E_0(\omega_0,\underline{\hat{\mathbf{k}}})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega_0 t - k_z z)} = 0$$

$$k_z^2 = k^2 = \frac{\omega_0^2}{c_0^2}$$

Dispersion relation of a monochromatic plane wave /
Dispersionsrelation einer monochromatischen ebenen Welle

$$k = \frac{\omega_0}{c_0} \quad\rightarrow\quad \omega_0(k) = c_0 k \quad\rightarrow\quad \omega_0 \rightarrow \omega \quad \omega(k) = c_0 k$$

Analytical and Numerical Dispersion Relation
Analytische und Numerische Dispersionsrelation

We compute in the 3-D case / Wir berechnen im 3D-Fall

$$\Delta \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{R}},t) - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{R}},t) = 0$$

$$\Delta E_0(\omega_0,\underline{\hat{\mathbf{k}}})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega_0 t - \underline{\mathbf{k}}\cdot\underline{\mathbf{R}})} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} E_0(\omega_0,\underline{\hat{\mathbf{k}}})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega_0 t - \underline{\mathbf{k}}\cdot\underline{\mathbf{R}})} = 0$$

$$\mathrm{j}^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) E_0(\omega_0,\underline{\hat{\mathbf{k}}})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega_0 t - \underline{\mathbf{k}}\cdot\underline{\mathbf{R}})} - \frac{1}{c_0^2}(\mathrm{j}\omega_0)^2 E_0(\omega_0,\underline{\hat{\mathbf{k}}})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega_0 t - \underline{\mathbf{k}}\cdot\underline{\mathbf{R}})} = 0$$

$$\underbrace{\left[-(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) + \frac{\omega_0^2}{c_0^2}\right]}_{\text{Dispersion relation / Dispersionsrelation}} E_0(\omega_0,\underline{\hat{\mathbf{k}}})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega_0 t - \underline{\mathbf{k}}\cdot\underline{\mathbf{R}})} = 0$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \frac{\omega_0^2}{c_0^2}$$

Dispersion relation of a monochromatic plane wave /
Dispersionsrelation einer monochromatischen ebenen Welle

$$k = \frac{\omega_0}{c_0} \quad\rightarrow\quad \omega_0(k) = c_0 k \quad\rightarrow\quad \omega_0 \rightarrow \omega \quad \omega(k) = c_0 k$$

Analytical and Numerical Dispersion Relation
Analytische und Numerische Dispersionsrelation

Dispersion relation for a plane wave /
Dispersionsrelation für eine ebene Welle

$$k = \frac{\omega_0}{c_0} \to k(\omega) = \frac{\omega}{c_0}$$

$$\omega(k) = k\, c_0$$

This means that the circular frequency is a function of k /
Dies bedeutet, dass die Kreisfrequenz eine Funktion von k ist

Dispersion relation / Dispersionsrelation

$$\omega(k)$$

We define now / Wir definieren nun:

- Phase velocity / Phasengeschwindigkeit
- Phase velocity vector / Phasengeschwindigkeitsvektor
- Group or energy velocity / Gruppen- oder Energiegeschwindigkeit
- Group or energy velocity vector / Gruppen- oder Energiegeschwindigkeitsvektor

Dispersion Relation and Phase, Group, and Energy Velocities /
Dispersionsrelation und Phasen-, Gruppen- und Energiegeschwindigkeiten

Dispersion relation / Dispersionsrelation $\omega(k)$

- Phase velocity / Phasengeschwindigkeit

$$c_{\text{ph}}(\omega,k) = \frac{\omega(k)}{k}$$

- Phase velocity vector / Phasengeschwindigkeitsvektor

$$\text{1D:}\ \underline{\mathbf{c}}_{\text{ph}}(\omega,k) = \frac{\omega(k)}{k}\operatorname{sgn}(k_z)\hat{\underline{\mathbf{k}}}$$

$$\text{3D:}\ \underline{\mathbf{c}}_{\text{ph}}(\omega,k) = \frac{\omega(k)}{k}\hat{\underline{\mathbf{k}}}$$

- Group or energy velocity / Gruppen- oder Energiegeschwindigkeit

$$\text{1D:}\ c_{\text{gr}}(\omega,k) = c_{\text{E}}(\omega,k) = \frac{d}{dk}\omega(k)$$

$$\text{3D:}\ c_{\text{gr}}(\omega,\underline{\mathbf{k}}) = c_{\text{E}}(\omega,\underline{\mathbf{k}}) = \left|\nabla_{\underline{\mathbf{k}}}\omega(k)\right|$$

- Group or energy velocity vector / Gruppen- oder Energiegeschwindigkeitsvektor

$$\text{1D:}\ \underline{\mathbf{c}}_{\text{gr}}(\omega,k) = \underline{\mathbf{c}}_{\text{E}}(\omega,k) = \frac{d}{dk}\omega(k)\hat{\underline{\mathbf{k}}}$$

$$\text{3D:}\ \underline{\mathbf{c}}_{\text{gr}}(\omega,\underline{\mathbf{k}}) = \underline{\mathbf{c}}_{\text{E}}(\omega,\underline{\mathbf{k}}) = \nabla_{\underline{\mathbf{k}}}\omega(k)$$

Gradient with regard to the wave vector $\underline{\mathbf{k}}$ /
Gradient bezüglich des Wellenvektors $\underline{\mathbf{k}}$

$$\nabla_{\underline{\mathbf{k}}} = \underline{\mathbf{e}}_x\frac{\partial}{\partial k_x} + \underline{\mathbf{e}}_y\frac{\partial}{\partial k_y} + \underline{\mathbf{e}}_z\frac{\partial}{\partial k_z}$$

Dispersion Relation and Phase, Group, and Energy Velocities for a Monochromatic Plane Wave / Dispersionsrelation und Phasen-, Gruppen- und Energiegeschwindigkeiten für eine monochromatische ebene Welle

Dispersion relation for a monochromatic plane wave / Dispersionsrelation für eine monochromatische ebene Welle

$$\omega(k) = kc_0$$

- Phase velocity / Phasengeschwindigkeit

$$c_{\text{ph}}(\omega, k) = \frac{\omega(k)}{k} = \frac{kc_0}{k} = c_0$$

- Phase velocity vector / Phasengeschwindigkeitsvektor

$$\text{1D:} \;\; \underline{\mathbf{c}}_{\text{ph}}(\omega, k) = \frac{\omega(k)}{k}\operatorname{sgn}(k_z) = c_0 \operatorname{sgn}(k_z)$$

$$\text{3D:} \;\; \underline{\mathbf{c}}_{\text{ph}}(\omega, k) = \frac{\omega(k)}{k}\hat{\underline{\mathbf{k}}} = c_0 \hat{\underline{\mathbf{k}}}$$

- Group or energy velocity / Gruppen- oder Energiegeschwindigkeit

$$\text{1D:} \;\; c_{\text{gr}}(\omega, k) = c_{\text{E}}(\omega, k) = \frac{d}{dk}\omega(k) = \frac{d}{dk}kc_0 = c_0$$

$$\text{3D:} \;\; c_{\text{gr}}(\omega, \underline{\mathbf{k}}) = c_{\text{E}}(\omega, \underline{\mathbf{k}}) = \left|\nabla_{\underline{\mathbf{k}}}\omega(k)\right| = \left|\nabla_{\underline{\mathbf{k}}}kc_0\right| = c_0$$

- Group or energy velocity vector / Gruppen- oder Energiegeschwindigkeitsvektor

$$\text{1D:} \;\; \underline{\mathbf{c}}_{\text{gr}}(\omega, k) = \underline{\mathbf{c}}_{\text{E}}(\omega, k) = \frac{d}{dk}\omega(k)\hat{\underline{\mathbf{k}}} = c_0 \hat{\underline{\mathbf{k}}}$$

$$\text{3D:} \;\; \underline{\mathbf{c}}_{\text{gr}}(\omega, \underline{\mathbf{k}}) = \underline{\mathbf{c}}_{\text{E}}(\omega, \underline{\mathbf{k}}) = \nabla_{\underline{\mathbf{k}}}\omega(k) = c_0 \hat{\underline{\mathbf{k}}}$$

Analytical and Numerical Dispersion Relation
Analytische und Numerische Dispersionsrelation

$$\nabla_{\underline{\mathbf{k}}} = \underline{\mathbf{e}}_x \frac{\partial}{\partial k_x} + \underline{\mathbf{e}}_y \frac{\partial}{\partial k_y} + \underline{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial k_z}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\underline{\mathbf{k}}} kc_0 &= \left(\underline{\mathbf{e}}_x \frac{\partial}{\partial k_x} + \underline{\mathbf{e}}_y \frac{\partial}{\partial k_y} + \underline{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial k_z}\right)\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}\,c_0 \\
&= \left(\underline{\mathbf{e}}_x \frac{\partial}{\partial k_x} + \underline{\mathbf{e}}_y \frac{\partial}{\partial k_y} + \underline{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial k_z}\right)\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}\,c_0 \\
&= c_0\left(\underline{\mathbf{e}}_x \frac{\partial}{\partial k_x} + \underline{\mathbf{e}}_y \frac{\partial}{\partial k_y} + \underline{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial k_z}\right)\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \\
&= c_0\left[\frac{1}{2}\frac{2k_x\underline{\mathbf{e}}_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} + \frac{1}{2}\frac{2k_y\underline{\mathbf{e}}_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} + \frac{1}{2}\frac{2k_z\underline{\mathbf{e}}_z}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}\right] \\
&= c_0\left[\frac{k_x\underline{\mathbf{e}}_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} + \frac{k_y\underline{\mathbf{e}}_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} + \frac{k_z\underline{\mathbf{e}}_z}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}\right] \\
&= c_0 \frac{k_x\underline{\mathbf{e}}_x + k_y\underline{\mathbf{e}}_y + k_z\underline{\mathbf{e}}_z}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} \\
&= c_0 \hat{\underline{\mathbf{k}}}
\end{aligned}$$

Numerical Dispersion Relation / Numerische Dispersionsrelation

Numerical dispersion relation for the FD, FDTD, and FIT algorithms /
Numerische Dispersionsrelation für die FD-, FDTD- und FIT-Algorithmen

3-D cse
3D-Fall
$$\frac{1}{(c_0\Delta t)^2}\sin^2\left(\frac{\omega_0\Delta t}{2}\right)=\frac{1}{(\Delta x)^2}\sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right)+\frac{1}{(\Delta y)^2}\sin^2\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right)+\frac{1}{(\Delta z)^2}\sin^2\left(\frac{k_z\Delta z}{2}\right)$$

2-D cse
2D-Fall
$$\frac{1}{(c_0\Delta t)^2}\sin^2\left(\frac{\omega_0\Delta t}{2}\right)=\frac{1}{(\Delta x)^2}\sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right)+\frac{1}{(\Delta y)^2}\sin^2\left(\frac{k_y\Delta z}{2}\right)$$

1-D cse
1D-Fall
$$\frac{1}{(c_0\Delta t)^2}\sin^2\left(\frac{\omega_0\Delta t}{2}\right)=\frac{1}{(\Delta x)^2}\sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right)$$

3-D cse
3D-Fall
$$\omega\left(k_x,k_y,k_z,\Delta x,\Delta y,\Delta z,\Delta t\right)=\frac{2}{\Delta t}\arcsin\left\{c_0\Delta t\sqrt{\left[\frac{1}{(\Delta x)^2}\sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right)+\frac{1}{(\Delta y)^2}\sin^2\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right)+\frac{1}{(\Delta z)^2}\sin^2\left(\frac{k_z\Delta z}{2}\right)\right]}\right\}$$

2-D cse
2D-Fall
$$\omega\left(k_x,k_y,\Delta x,\Delta y,\Delta t\right)=\frac{2}{\Delta t}\arcsin\left\{c_0\Delta t\sqrt{\left[\frac{1}{(\Delta x)^2}\sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right)+\frac{1}{(\Delta y)^2}\sin^2\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right)\right]}\right\}$$

1-D cse
1D-Fall
$$\omega\left(k_x,\Delta x,\Delta t\right)=\frac{2}{\Delta t}\arcsin\left\{\frac{c_0\Delta t}{\Delta x}\sqrt{\sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right)}\right\}$$

Numerical Dispersion Relation / Numerische Dispersionsrelation

1-D case
1D-Fall
$$\omega\left(k_x,\Delta x,\Delta t\right)=\frac{2}{\Delta t}\arcsin\left\{\frac{c_0\Delta t}{\Delta x}\sin\left(\frac{|k_x|\Delta x}{2}\right)\right\}$$

$$\frac{c_0\Delta t}{\Delta x}=\widehat{\Delta t}$$

$$|k_x|=k=\frac{\omega}{c}=\frac{2\pi f}{c}=\frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda=\frac{2\pi}{|k_x|}$$

$$G=\frac{\lambda}{\Delta x}=\frac{2\pi}{|k_x|\Delta x}$$

1-D case
1D-Fall
$$\omega\left(k_x,\Delta x,\Delta t\right)=\frac{2}{\Delta t}\arcsin\left\{\underbrace{\frac{c_0\Delta t}{\Delta x}}_{=\widehat{\Delta t}}\sin\left(\underbrace{\frac{|k_x|\Delta x}{2}}_{=\frac{\pi}{G}}\right)\right\}$$
$$=\frac{2}{\Delta t}\arcsin\left\{\widehat{\Delta t}\sin\left(\frac{\pi}{G}\right)\right\}$$

1-D Numerical Dispersion Relation / 1D Numerische Dispersionsrelation

Numerical dispersion relation / Numerische Dispersionsrelation

$$\omega\left(k_x, \Delta x, \Delta t\right) = \frac{2}{\Delta t} \arcsin\left\{\frac{c_0 \Delta t}{\Delta x} \sin\left(\frac{|k_x| \Delta x}{2}\right)\right\}$$

$$\omega\left(k_x, \Delta x, \Delta t\right) = \frac{2}{\Delta t} \arcsin\left\{\widehat{\Delta t} \sin\left(\frac{\pi}{G}\right)\right\}$$

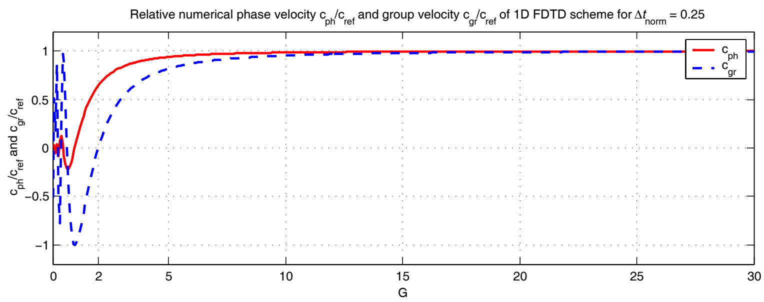
Numerical phase velocity / Numerische Phasengeschwindigkeit

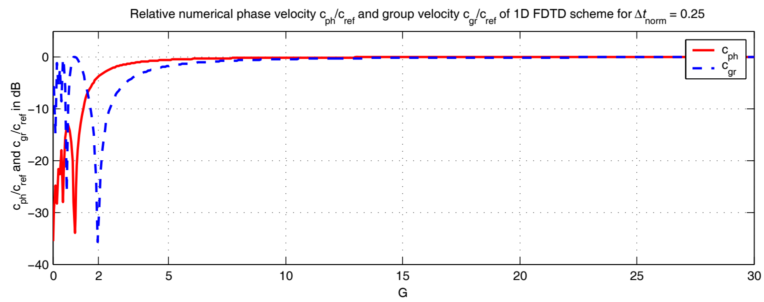
$$\frac{c_{\mathrm{ph}}\left(G, \widehat{\Delta t}\right)}{c_0} = \frac{G}{\pi \widehat{\Delta t}} \arcsin\left\{\widehat{\Delta t} \sin\left(\frac{\pi}{G}\right)\right\}$$

Numerical group velocity / Numerische Gruppengeschwindigkeit

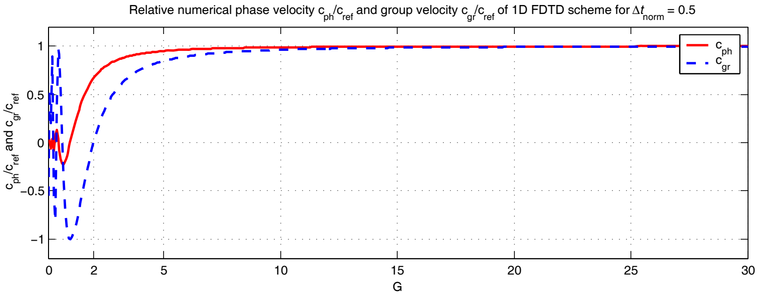
$$\frac{c_{\mathrm{gr}}\left(G, \widehat{\Delta t}\right)}{c_0} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{G}\right)}{\sqrt{1 - \widehat{\Delta t}^{\,2} \sin^2\left(\frac{\pi}{G}\right)}}$$

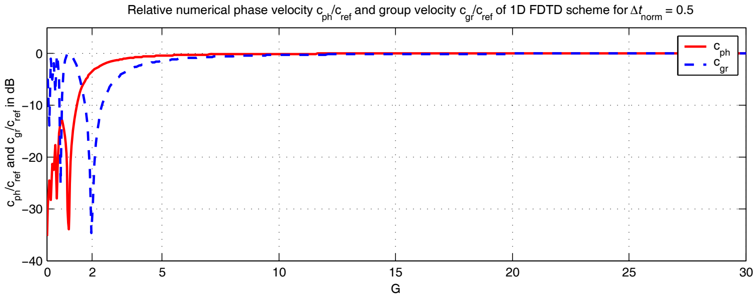
1-D Numerical Dispersion Relation / 1D Numerische Dispersionsrelation





1-D Numerical Dispersion Relation / 1D Numerische Dispersionsrelation





1-D Numerical Dispersion Relation – Magic Time Step / 1D Numerische Dispersionsrelation – Magische Zeitschrittweite

$$\widehat{\Delta t} = 1$$

Numerical phase velocity / Numerische Phasengeschwindigkeit

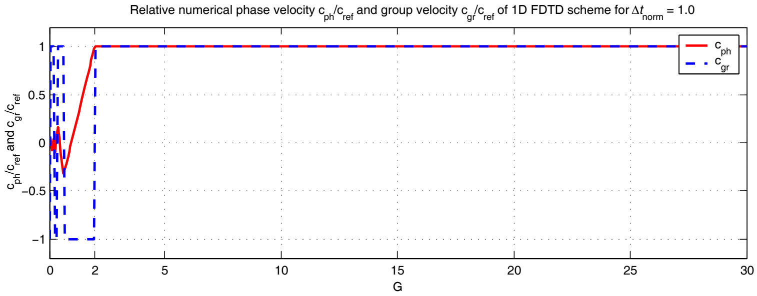
$$\frac{c_{\mathrm{ph}}\left(G,\widehat{\Delta t}\right)}{c_0} = \frac{G}{\pi\widehat{\Delta t}}\arcsin\left\{\widehat{\Delta t}\sin\left(\frac{\pi}{G}\right)\right\} = \frac{G}{\pi}\arcsin\left\{\sin\left(\frac{\pi}{G}\right)\right\} = \frac{G}{\pi}\frac{\pi}{G} = 1$$

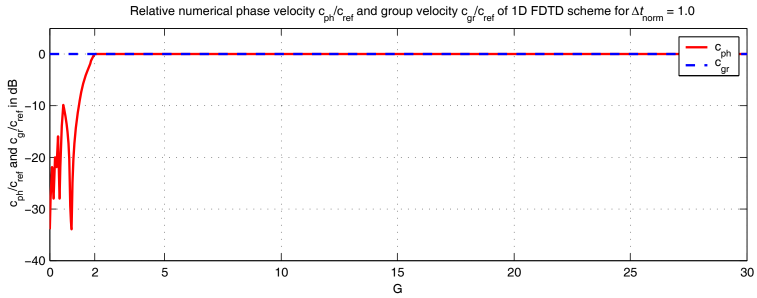
Numerical group velocity / Numerische Gruppengeschwindigkeit

$$\frac{c_{\mathrm{gr}}\left(G,\widehat{\Delta t}\right)}{c_0} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{G}\right)}{\sqrt{1-\widehat{\Delta t}^2\sin^2\left(\frac{\pi}{G}\right)}} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{G}\right)}{\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\pi}{G}\right)}} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{G}\right)}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{G}\right)}} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{G}\right)}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{G}\right)}} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{G}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{G}\right)} = 1$$

$\Rightarrow$ No numerical dispersion / Keine numerische Dispersion

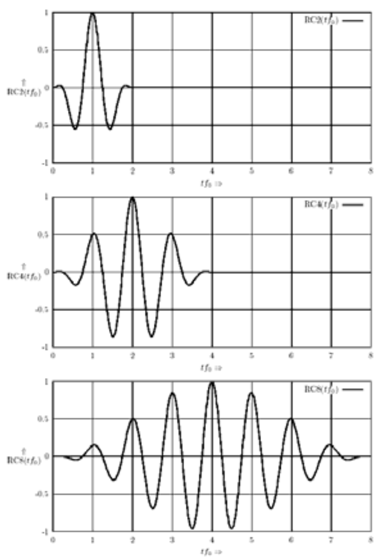
1-D Numerical Dispersion Relation – Magic Time Step / 1D Numerische Dispersionsrelation – Magische Zeitschrittweite



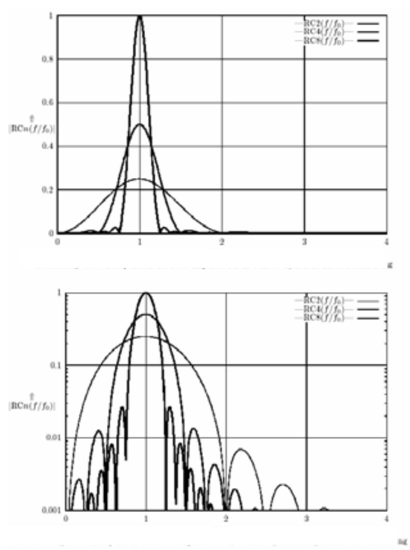


Numerical Dispersion – Test Function / Numerische Dispersion – Testfunktion

Time History of the RC2, RC4, and RC8 Excitation Function / Zeitfunktion des RC2-, RC4- und RC8-Anregungsimpulses



Time Spectrum of the RC2, RC4, and RC8 Excitation Function / Zeitspektrum des RC2-, RC4- und RC8-Anregungsimpulses



Numerical Dispersion of an RC2 Pulse / Numerische Dispersion eines RC2-Impulses

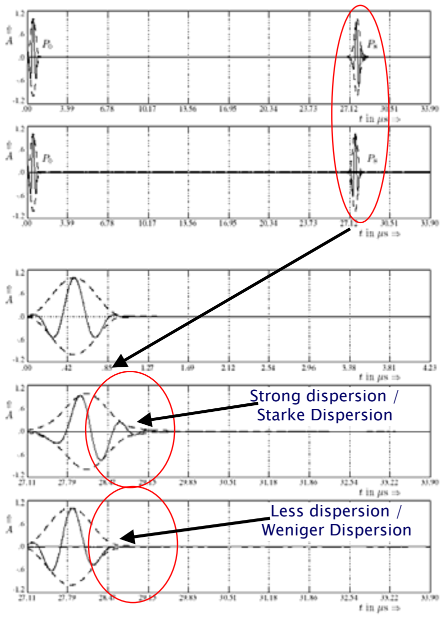
Second Order Scheme in Space and Time (2S2T) / Schema zweiter Ordnung im Raum und in der Zeit (2S2T)

Fourth Order Scheme in Space und Second Order Scheme in Time (4S2T) / Schema vierter Ordnung im Raum und zweiter Ordung in der Zeit (4S2T)

Original RC2 Pulse / Originaler RC2-Impuls

Second Order Scheme in Space and Time (2S2T) / Schema zweiter Ordnung im Raum und in der Zeit (2S2T)

Fourth Order Scheme in Space und Second Order Scheme in Time (4S2T) / Schema vierter Ordnung im Raum und zweiter Ordung in der Zeit (4S2T)



Numerical Dispersion of an RC4 Pulse / Numerische Dispersion eines RC4-Impulses

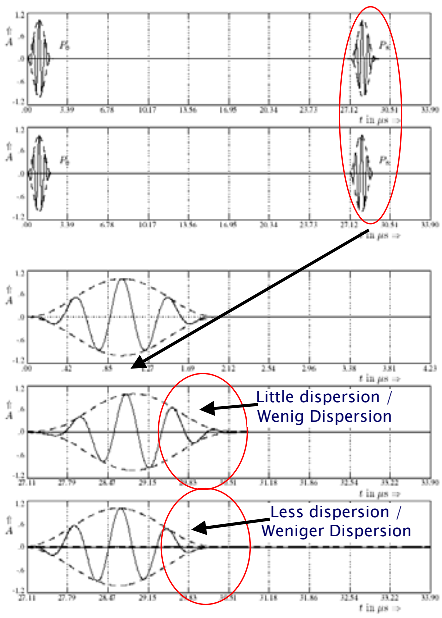
Second Order Scheme in Space and Time (2S2T) / Schema zweiter Ordnung im Raum und in der Zeit (2S2T)

Fourth Order Scheme in Space und Second Order Scheme in Time (4S2T) / Schema vierter Ordnung im Raum und zweiter Ordung in der Zeit (4S2T)

Original RC4 Pulse / Originaler RC4-Impuls

Second Order Scheme in Space and Time (2S2T) / Schema zweiter Ordnung im Raum und in der Zeit (2S2T)

Fourth Order Scheme in Space und Second Order Scheme in Time (4S2T) / Schema vierter Ordnung im Raum und zweiter Ordung in der Zeit (4S2T)



Numerical Dispersion of an RC8 Pulse / Numerische Dispersion eines RC8-Impulses

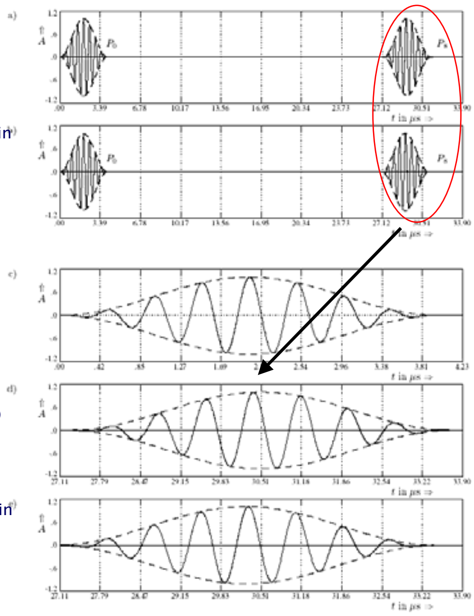
Second Order Scheme in Space and Time (2S2T) /
Schema zweiter Ordnung im Raum und in der Zeit (2S2T)

Fourth Order Scheme in Space und Second Order Scheme in Time (4S2T) / Schema vierter Ordnung im Raum und zweiter Ordung in der Zeit (4S2T)

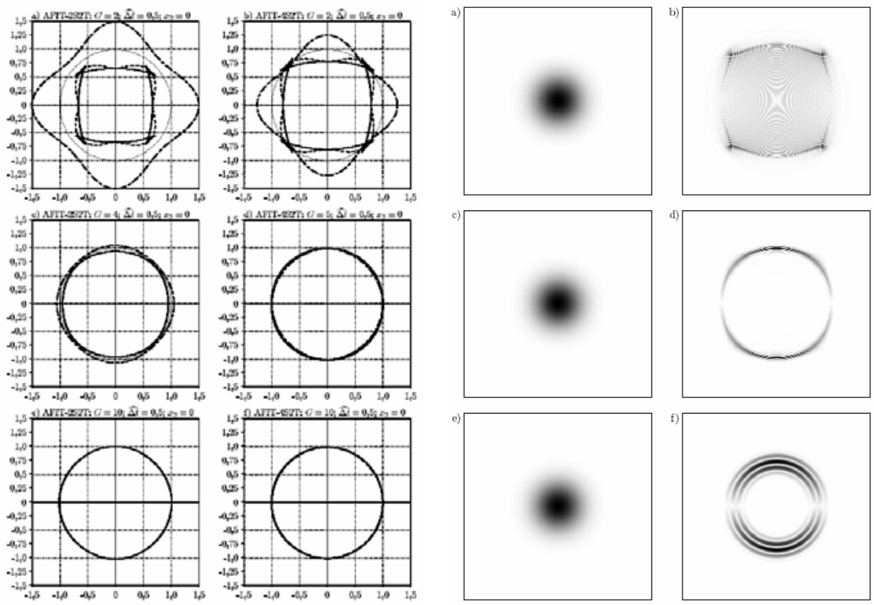
Original RC8 Pulse /
Originaler RC8-Impuls

Second Order Scheme in Space and Time (2S2T) /
Schema zweiter Ordnung im Raum und in der Zeit (2S2T)

Fourth Order Scheme in Space und Second Order Scheme in Time (4S2T) / Schema vierter Ordnung im Raum und zweiter Ordung in der Zeit (4S2T)



2-D Numerical Dispersion Relation – Numerical Anisotropy / 2D Numerische Dispersionsrelation – Numerische Anisotropie



FD Method – Properties / FD-Methode – Eigenschaften

- Spatial and Temporal Discretization / Räumliche und zeitliche Diskretisierung $\boxed{\begin{matrix}\Delta z = ? \\ \Delta t = ?\end{matrix}}$
- Consistency / Konsistenz
- Dispersion / Dispersion
- Stability Condition / Stabilitätsbedingung $\boxed{\Delta t = f(\Delta z)}$
- Convergence / Konvergenz

Derivation of the Numerical Dispersion Relation for the 1-D FD Scheme of 2nd Order / Ableitung der numerischen Dispersionsrelation für das 1D-FD-Schema 2ter Ordnung

Stability by the *von Neumann*'s method (Fourier series method):

Insert a complex monofrequent (monochromatic) plane wave into the discrete FD equations and analyze the spectral radius of the amplification matrix, where the spectral radius must be smaller equal one.

Stabilität durch die *von Neumann*sche Methode (Fourier-Reihen-Methode):

Setze eine komplex monofrequente (monochromatische) ebene Welle in die diskreten FD-Gleichungen ein und analysiere den spektralen Radius der Verstärkungsmatrix, wobei der spektrale Radius kleinergleich Eins sein muss.

Complex monofrequent (monochromatic) plane wave / Komplex monofrequente (monochromatische) ebene Welle

$$E_x(\underline{\mathbf{R}},t) = E_0(\omega_0,\hat{\underline{\mathbf{k}}})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\omega_0 t - k\hat{\underline{\mathbf{k}}}\cdot\underline{\mathbf{R}}\right)} = E_0(\omega_0,\hat{\underline{\mathbf{k}}})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\hat{\underline{\mathbf{k}}}\cdot\underline{\mathbf{R}}}$$

$$\{\mathbf{W}\}^{(n_t+1)} = [\mathbf{G}]_{1\mathrm{D}}^{\mathrm{FD}}\,\{\mathbf{W}\}^{(n_t)}$$

$[\mathbf{G}]_{1\mathrm{D}}^{\mathrm{FD}}$: Amplification matrix / Verstärkungsmatrix

Spectral radius / Spektraler Radius $\rho\left([\mathbf{G}]_{1\mathrm{D}}^{\mathrm{FD}}\right) \le 1$ of the matrix / der Matrix $[\mathbf{G}]_{1\mathrm{D}}^{\mathrm{FD}}$

where / wobei $\rho\left([\mathbf{G}]_{1\mathrm{D}}^{\mathrm{FD}}\right) = \max\limits_{n=1,\dots,N}\left|\nu_n\left([\mathbf{G}]_{1\mathrm{D}}^{\mathrm{FD}}\right)\right|$

$\nu_n\left([\mathbf{G}]_{1\mathrm{D}}^{\mathrm{FD}}\right)$: nth eigenvalue of the matrix / n-ter Eigenwert der Matrix $[\mathbf{G}]_{1\mathrm{D}}^{\mathrm{FD}}$

FD Method - Properties / FD-Methode - Eigenschaften

- Spatial and Temporal Discretization / Räumliche und zeitliche Diskretisierung $\boxed{\begin{array}{l}\Delta z = ? \\ \Delta t = ?\end{array}}$
- Consistency / Konsistenz
- Dispersion / Dispersion
- Stability Condition / Stabilitätsbedingung $\boxed{\Delta t = f(\Delta z)}$
- Convergence / Konvergenz

Consistency / Konsistenz

Consistency
Consistency means that the discrete equations result in the analytical equations by calculating the limit $\{\Delta z, \Delta t\} \to 0$.

We can prove the consistency of the 1-D FD scheme using the above numerical dispersion relation. We show, that the grid dispersion relation reaches in the limit $\{\Delta z, \Delta t\} \to 0$ the analytical dispersion relation for a plane wave as a solution of the homogeneous Helmholtz equation.

Konsistenz
Konsistenz bedeutet, dass die diskreten Gleichungen bei dem Grenzübergang $\{\Delta z, \Delta t\} \to 0$ in die analytischen Gleichungen übergehen.

Wir können die Konsistenz des 1D-FD-Schemas anhand der numerischen Dispersionsrelation überprüfen. Wir zeigen, dass die numerische Dispersionsrelation bei dem Grenzübergang $\{\Delta z, \Delta t\} \to 0$ in die analytische Dispersionsrelation einer ebene Welle als Lösung der homogenen Helmholtz-Gleichung übergeht.

Consistency / Konsistenz

$$\lim_{\{\Delta z,\Delta t\}\to 0}\left[\frac{1}{(c_0\Delta t)^2}\sin^2\left(\frac{\omega_0\Delta t}{2}\right)=\frac{1}{(\Delta z)^2}\sin^2\left(\frac{\mathrm{k}_z\Delta z}{2}\right)\right]$$

$$\lim_{\{\Delta z,\Delta t\}\to 0}\left[\frac{1}{c_0\Delta t}\sin\left(\frac{\omega_0\Delta t}{2}\right)=\frac{1}{\Delta z}\sin\left(\frac{|\mathrm{k}_z|\Delta z}{2}\right)\right]$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\sin\left(\frac{\omega_0\Delta t}{2}\right)=\frac{\omega_0\Delta t}{2}$$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\sin\left(\frac{|\mathrm{k}_z|\Delta z}{2}\right)=\frac{|\mathrm{k}_z|\Delta z}{2}$$

$$\frac{1}{c_0\Delta t}\frac{\omega_0\Delta t}{2}=\frac{1}{\Delta z}\frac{|\mathrm{k}_z|\Delta z}{2}$$

$$\underbrace{\left(\frac{\omega_0}{c_0}\right)}_{=k_0}=|\mathrm{k}_z|$$

$$k_0=|\mathrm{k}_z|$$

FD Method - Properties / FD-Methode - Eigenschaften

- Spatial and Temporal Discretization / Räumliche und zeitliche Diskretisierung $\boxed{\begin{array}{l}\Delta z=?\\ \Delta t=?\end{array}}$
- Consistency / Konsistenz
- Dispersion / Dispersion
- Stability Condition / Stabilitätsbedingung $\boxed{\Delta t=f(\Delta z)}$
- Convergence / Konvergenz

Convergence / Konvergenz

Convergence
The importance of the concept of consistency and stability is seen in the Lax-Richtmyer equivalence theorem, which is the fundamental theorem in the theory of finite difference schemes for initial value problems.

Lax-Richtmyer Equivalence Theorem
A consistent finite difference scheme for a partial differential equations of which the initial value problem is well-posed is convergent if and only if it is stable.

Konvergenz
Die Wichtigkeit des Konzeptes der Konsistenz und Stabilität kann man an dem Lax-Richtmyer-Äquivalenztheorem sehen, welches ein fundamentales Theorem in der Theorie der Finite Differenzen zur Lösung eines Anfangswertproblems darstellt.

Lax-Richtmyer Äquivalenztheorem
Ein konsistentes Finite Differenzen Schema für eine partielle Differentialgleichung eines gut gestellten Anfangswertproblems ist konvergent, wenn und nur wenn es stabil ist.

End of Lecture 11 / Ende der 11. Vorlesung