Numerical Methods of Electromagnetic Field Theory II (NFT II) Numerische Methoden der Elektromagnetischen Feldtheorie II (NFT II) /

3rd Lecture / 3. Vorlesung

Dr.-Ing. René Marklein
marklein@uni-kassel.de
http://www.tet.e-technik.uni-kassel.de
http://www.uni-kassel.de/fb16/tet/marklein/index.html

Universität Kassel
Fachbereich Elektrotechnik / Informatik (FB 16)
Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik (FG TET)
Wilhelmshöher Allee 71
Büro: Raum 2113 / 2115
D-34121 Kassel

University of Kassel
Dept. Electrical Engineering / Computer Science (FB 16)
Electromagnetic Field Theory (FG TET)
Wilhelmshöher Allee 71
Office: Room 2113 / 2115
D-34121 Kassel

2-D Versions of EFIE and MFIE: TM and TE Case / 2D-Versionen von EFIE und MFIE: TM- und TE-Fall

2-D Case / 2D-Fall

Position Vector / Ortsvektor

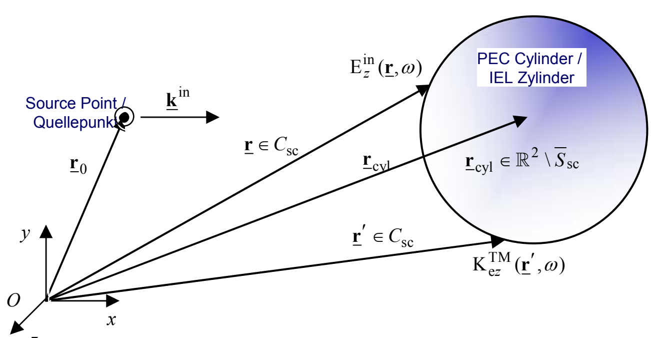
$$\underline{\mathbf{R}} = x\underline{\mathbf{e}}_x + y\underline{\mathbf{e}}_y + z\underline{\mathbf{e}}_z\Big|_{z=0} = \underbrace{x\underline{\mathbf{e}}_x + y\underline{\mathbf{e}}_y}_{=r\underline{\mathbf{e}}_r(\varphi)} + \underbrace{z\underline{\mathbf{e}}_z}_{=\underline{\mathbf{0}}} = \underbrace{r\underline{\mathbf{e}}_r(\varphi)}_{=\underline{\mathbf{r}}} = \underline{\mathbf{r}}$$

Field Quantities / Feldgrößen

$$\left\{\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{R}},\omega), \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{R}},\omega), \underline{\mathbf{K}}_\mathrm{e}(\underline{\mathbf{R}},\omega), \underline{\mathbf{K}}_\mathrm{m}(\underline{\mathbf{R}},\omega)\right\}\Big|_{z=0} \rightarrow \left\{\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}},\omega), \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}},\omega), \underline{\mathbf{K}}_\mathrm{e}(\underline{\mathbf{r}},\omega), \underline{\mathbf{K}}_\mathrm{m}(\underline{\mathbf{r}},\omega)\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \equiv 0$$

All Field Quantities and the Geometry are Independent of z / Alle Feldgrößen und die Geometrie sind von z unabhängig



2-D Versions of EFIE and MFIE: TM and TE Case / 2D-Versionen von EFIE und MFIE: TM- und TE-Fall

Boundary Condition / Randbedingung

$$\underline{\mathbf{n}}_{\mathrm{sc}} \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}},\omega) = \underline{\mathbf{0}} \quad \to \underline{\mathbf{K}}_{\mathrm{m}}(\underline{\mathbf{r}},\omega) = \underline{\mathbf{0}} \quad \Longrightarrow \quad \underline{\mathbf{n}}_{\mathrm{sc}} \times \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}},\omega) = \underline{\mathbf{K}}_{\mathrm{e}}(\underline{\mathbf{r}},\omega) \quad \to \underline{\mathbf{K}}_{\mathrm{e}}(\underline{\mathbf{r}},\omega) \neq \underline{\mathbf{0}}$$

$$\underbrace{\underline{\mathbf{n}}_{\mathrm{sc}} \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}},\omega)}_{=\underline{\mathbf{0}}} = \underline{\mathbf{n}}_{\mathrm{sc}} \times \underline{\mathbf{E}}^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{r}},\omega) + \underline{\mathbf{n}}_{\mathrm{sc}} \times \underline{\mathbf{E}}^{\mathrm{sc}}(\underline{\mathbf{r}},\omega)$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\mathbf{n}}_{\mathrm{sc}} \times \underline{\mathbf{E}}^{\mathrm{sc}}(\underline{\mathbf{r}},\omega) = -\underline{\mathbf{n}}_{\mathrm{sc}} \times \underline{\mathbf{E}}^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{r}},\omega)$$

$$\underline{\mathbf{E}}_t^{\mathrm{sc}}(\underline{\mathbf{r}},\omega) = -\underline{\mathbf{E}}_t^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{r}},\omega)$$

This means that the tangential component of the incident and scattered wavefield are pointing in the opposite direction at the scatterer surface / Dies bedeutet, dass die Tangentialkomponente des einfallenden und gestreuten Wellenfeldes auf der Streueroberfläche in die entgegen gesetzte Richtung zeigen.

For the Derivation of the 2-D PEC TM EFIE we start from the 3-D Franz-Larmor version of EFIE for the Scattered Electric Field Strength for / Zur Ableitung der 2D-PEC-TM-EFIE starten wir mit der 3D-Franz-Larmor-Version von EFIE für die gestreute elektrische Feldstärke für

$$\underline{\mathbf{R}} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{V}_{\mathrm{sc}}$$

Franz-Larmor version / Franz-Larmor-Version:

$$-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}\underline{\mathbf{n}}_{\mathrm{sc}} \times \nabla \times \nabla \times \oiint_{\underline{\mathbf{R}}' \in S_{\mathrm{sc}} = \partial V_{\mathrm{sc}}} \underline{\mathbf{K}}_{\mathrm{e}}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)\, G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\,\mathrm{d}^2\underline{\mathbf{R}}' = -\underline{\mathbf{n}}_{\mathrm{sc}} \times \underline{\mathbf{E}}^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{R}},\omega)$$

2-D Versions of EFIE: TM Case / 2D-Versionen von EFIE: TM-Fall

Scattered Electric Field Strength / Gestreute elektrische Feldstärke

$$\underline{\mathbf{n}}_{\mathrm{sc}} \times \underbrace{\left[-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}\nabla \times \nabla \times \oiint_{\underline{\mathbf{R}}' \in S_{\mathrm{sc}} = \partial V_{\mathrm{sc}}} \underline{\mathbf{K}}_{\mathrm{e}}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)\, G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\,\mathrm{d}^2\underline{\mathbf{R}}'\right]}_{=\underline{\mathbf{E}}^{\mathrm{sc}}(\underline{\mathbf{R}},\omega)} = -\underline{\mathbf{n}}_{\mathrm{sc}} \times \underline{\mathbf{E}}^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{R}},\omega)$$

$$\underline{\mathbf{E}}^{\mathrm{sc}}(\underline{\mathbf{R}},\omega) = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}\nabla \times \nabla \times \oiint_{\underline{\mathbf{R}}' \in S_{\mathrm{sc}} = \partial V_{\mathrm{sc}}} \underline{\mathbf{K}}_{\mathrm{e}}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)\, G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\,\mathrm{d}^2\underline{\mathbf{R}}'$$

In the 2-D TM is only the E_z Component Unequal of Zero. That's Because we project the Electric Field Strength Onto the Unit Vector in z Direction / Im 2D-TM-Fall ist nur die E_z Komponente ungleich von Null. Deshalb projizieren wir den elektrische Feldstärkevektor auf den Einheitsvektor in z-Richtung

$$\underline{\mathbf{e}}_z \bullet \underline{\mathbf{E}}^{\mathrm{sc}}(\underline{\mathbf{R}},\omega) = \mathrm{E}_z^{\mathrm{sc}}(\underline{\mathbf{R}},\omega)$$

We take only the z Component of the above Integral Equation for the observation point outside the scattering volume / Wir nehmen nur die z-Komponente der oberen Integralgleichung für einen Beobachtungspunkt außerhalb des Streuvolumens

$$\underline{\mathbf{e}}_z \bullet \underline{\mathbf{E}}^{\mathrm{sc}}(\underline{\mathbf{R}},\omega) = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}\underline{\mathbf{e}}_z \bullet \nabla \times \nabla \times \oiint_{\underline{\mathbf{R}}' \in S_{\mathrm{sc}} = \partial V_{\mathrm{sc}}} \underline{\mathbf{K}}_{\mathrm{e}}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)\, G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\,\mathrm{d}^2\underline{\mathbf{R}}'$$

2-D Versions of EFIE: TM Case / 2D-Versionen von EFIE: TM-Fall

Now we Apply the double curl operator and specialize the result for the 2-D TM case at the plane *z=0*. /
Nun wenden wir den doppelten Rotationsoperator an und spezialisieren das Ergebnis für die Ebene *z=0*.

$$\underline{\mathbf{e}}_z \bullet \nabla\times\nabla\times \oiint_{\underline{\mathbf{R}}'\in S_{\text{sc}}=\partial V_{\text{sc}}} \underline{\mathbf{K}}_\text{e}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)\, G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\,\mathrm{d}^2\underline{\mathbf{R}}' = \underline{\mathbf{e}}_z \bullet \oiint_{\underline{\mathbf{R}}'\in S_{\text{sc}}=\partial V_{\text{sc}}} \nabla\times\nabla\times\left[\underline{\mathbf{K}}_\text{e}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)\, G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\right]\mathrm{d}^2\underline{\mathbf{R}}'$$

We compute for the double curl operator /
Wir berechnen für den doppelten Rotationsoperator

$$\begin{aligned}\nabla\times\nabla\times\left[\underline{\mathbf{K}}_\text{e}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)\, G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\right] &= \nabla\nabla\bullet\left[\underline{\mathbf{K}}_\text{e}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)\, G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\right] - \nabla\bullet\nabla\left[\underline{\mathbf{K}}_\text{e}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)\, G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\right]\\ &= \underline{\mathbf{K}}_\text{e}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)\bullet\nabla\nabla G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega) - \underline{\mathbf{K}}_\text{e}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)\nabla\bullet\nabla G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\end{aligned}$$

For all points outside the Scattering Volume we find /
Für alle Punkte außerhalb des Streuvolumens find wir

$$\begin{aligned}\nabla\nabla G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega) = k_0^2\Bigg\{ &-\left(\widehat{\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}'}\right)\left(\widehat{\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}'}\right) + \frac{\mathrm{j}}{k_0\left|\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}'\right|}\left[\underline{\underline{\mathbf{I}}} - 3\left(\widehat{\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}'}\right)\left(\widehat{\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}'}\right)\right]\\ &- \frac{1}{k_0^2\left|\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}'\right|}\left[\underline{\underline{\mathbf{I}}} - 3\left(\widehat{\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}'}\right)\left(\widehat{\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}'}\right)\right]\Bigg\} G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\end{aligned}$$

$$\nabla\bullet\nabla G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega) = -k_0^2 G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)$$

2-D Versions of EFIE: TM Case / 2D-Versionen von EFIE: TM-Fall

$$\nabla\times\nabla\times\left[\underline{\mathbf{K}}_\text{e}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)\, G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\right] = \underline{\mathbf{K}}_\text{e}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)\bullet\nabla\nabla G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega) - \underline{\mathbf{K}}_\text{e}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)\nabla\bullet\nabla G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)$$

We now consider the z independent case and an electric surface current density of the form /
Wir betrachten nun den von z unabhängigen Fall und eine elektrische Flächenstromdichte von der Form

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{K}}_\text{e}(\underline{\mathbf{R}}',\omega) &= \underline{\mathbf{K}}_\text{e}^\text{TM}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)\\ &= \text{K}_{\text{e}z}^\text{TM}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)\,\underline{\mathbf{e}}_z\end{aligned}$$

and find /
und finden

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{e}}_z\bullet\left[\underline{\mathbf{K}}_\text{e}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)\bullet\nabla\nabla G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\right]\Big|_{z=0} &= \underline{\mathbf{e}}_z\left[\text{K}_{\text{e}z}^\text{TM}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)\,\underline{\mathbf{e}}_z\bullet\nabla\nabla G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\right]\Big|_{z=0}\\ &= \text{K}_{\text{e}z}^\text{TM}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)\underbrace{\underline{\mathbf{e}}_z\underline{\mathbf{e}}_z : \nabla\nabla}_{=\frac{\partial^2}{\partial z^2}} G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\Big|_{z=0}\\ &= \text{K}_{\text{e}z}^\text{TM}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)\frac{\partial^2}{\partial z^2} G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\Big|_{z=0}\\ &= 0\end{aligned}$$

2-D Versions of EFIE: TM Case / 2D-Versionen von EFIE: TM-Fall

$$\underline{\mathbf{e}}_z \bullet \left[\underline{\mathbf{K}}_\mathrm{e}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)\nabla\bullet\nabla G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\right]\Big|_{z=0} = \underline{\mathbf{e}}_z \bullet \left[\mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)\underline{\mathbf{e}}_z\nabla\bullet\nabla G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\right]\Big|_{z=0}$$

$$= \left[\mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)\underbrace{\underline{\mathbf{e}}_z\bullet\underline{\mathbf{e}}_z}_{=1}\nabla\bullet\nabla G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\right]\Big|_{z=0}$$

$$= \left[\mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)\underbrace{\nabla\bullet\nabla G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)}_{-k_0^2 G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)}\right]\Big|_{z=0}$$

$$= -\mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)k_0^2 G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\Big|_{z=0}$$

$$\nabla\times\nabla\times\left[\underline{\mathbf{K}}_\mathrm{e}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\right]\Big|_{z=0} = \underbrace{\underline{\mathbf{K}}_\mathrm{e}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)\bullet\nabla\nabla G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)}_{=\underline{\mathbf{0}}} - \underbrace{\underline{\mathbf{K}}_\mathrm{e}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)\nabla\bullet\nabla G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)}_{=-\mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)k_0^2 G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)}\Bigg|_{z=0}$$

$$= \mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)k_0^2 G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\Big|_{z=0}$$

2-D Versions of EFIE: TM Case / 2D-Versionen von EFIE: TM-Fall

$$\underline{\mathbf{e}}_z\bullet\nabla\times\nabla\times\oiint_{\underline{\mathbf{R}}'\in S_\mathrm{sc}=\partial V_\mathrm{sc}}\underline{\mathbf{K}}_\mathrm{e}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\,\mathrm{d}^2\underline{\mathbf{R}}' = \underline{\mathbf{e}}_z\bullet\oiint_{\underline{\mathbf{R}}'\in S_\mathrm{sc}=\partial V_\mathrm{sc}}\nabla\times\nabla\times\left[\underline{\mathbf{K}}_\mathrm{e}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\right]\mathrm{d}^2\underline{\mathbf{R}}'$$

$$= -\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\underline{\mathbf{e}}_z\bullet\underline{\mathbf{E}}^{\mathrm{sc}}(\underline{\mathbf{R}},\omega)$$

$$\nabla\times\nabla\times\left[\underline{\mathbf{K}}_\mathrm{e}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\right]\Big|_{z=0} = \underbrace{\underline{\mathbf{K}}_\mathrm{e}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)\bullet\nabla\nabla G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)}_{=\underline{\mathbf{0}}} - \underbrace{\underline{\mathbf{K}}_\mathrm{e}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)\nabla\bullet\nabla G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)}_{=-\mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)k_0^2 G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)}\Bigg|_{z=0}$$

$$= \mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)k_0^2 G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\Big|_{z=0}$$

$$\underline{\mathbf{e}}_z\bullet\oiint_{\underline{\mathbf{R}}'\in S_\mathrm{sc}=\partial V_\mathrm{sc}}\nabla\times\nabla\times\left[\underline{\mathbf{K}}_\mathrm{e}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\right]\mathrm{d}^2\underline{\mathbf{R}}'\Big|_{z=0} = \oiint_{\underline{\mathbf{R}}'\in S_\mathrm{sc}=\partial V_\mathrm{sc}}\mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)k_0^2\,G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\,\mathrm{d}^2\underline{\mathbf{R}}'\Big|_{z=0}$$

$$= -\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\underline{\mathbf{e}}_z\bullet\underline{\mathbf{E}}^{\mathrm{sc}}(\underline{\mathbf{R}},\omega)\Big|_{z=0}$$

$$\underline{\mathbf{e}}_z\bullet\underline{\mathbf{E}}^{\mathrm{sc}}(\underline{\mathbf{R}},\omega)\Big|_{z=0} = -\frac{k_0^2}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}\oiint_{\underline{\mathbf{R}}'\in S_\mathrm{sc}=\partial V_\mathrm{sc}}\mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\,\mathrm{d}^2\underline{\mathbf{R}}'\Bigg|_{z=0}$$

$$= \mathrm{j}\omega\mu_0\oiint_{\underline{\mathbf{R}}'\in S_\mathrm{sc}=\partial V_\mathrm{sc}}\mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\,\mathrm{d}^2\underline{\mathbf{R}}'\Big|_{z=0}$$

$$\mathrm{E}_z^{\mathrm{sc}}(\underline{\mathbf{R}},\omega)\Big|_{z=0} = \mathrm{j}\omega\mu_0\oiint_{\underline{\mathbf{R}}'\in S_\mathrm{sc}=\partial V_\mathrm{sc}}\mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\,\mathrm{d}^2\underline{\mathbf{R}}'\Big|_{z=0}$$

2-D Versions of EFIE: TM Case / 2D-Versionen von EFIE: TM-Fall

$$\mathrm{E}_z^{\mathrm{sc}}(\underline{\mathbf{R}},\omega)\Big|_{z=0} = \mathrm{j}\omega\mu_0 \left[\oiint_{\underline{\mathbf{R}}'\in S_{\mathrm{sc}}=\partial V_{\mathrm{sc}}} \mathrm{K}_{\mathrm{e}\,z}^{\mathrm{TM}}(\underline{\mathbf{R}}',\omega)\, G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\,\mathrm{d}^2\underline{\mathbf{R}}' \right]\Bigg|_{z=0}$$

$$= \mathrm{j}\omega\mu_0 \oint_{\underline{\mathbf{r}}'\in C_{\mathrm{sc}}=\partial S_{\mathrm{sc}}} \mathrm{K}_{\mathrm{e}\,z}^{\mathrm{TM}}(\underline{\mathbf{r}}',\omega) \left[\int_{z'=-\infty}^{\infty} G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\,\mathrm{d}z' \right]\Bigg|_{z=0} \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'$$

$$\mathrm{E}_z^{\mathrm{sc}}(\underline{\mathbf{r}},\omega) = \mathrm{j}\omega\mu_0 \oint_{\underline{\mathbf{r}}'\in C_{\mathrm{sc}}=\partial S_{\mathrm{sc}}} \mathrm{K}_{\mathrm{e}\,z}^{\mathrm{TM}}(\underline{\mathbf{r}}',\omega) \left[\int_{z'=-\infty}^{\infty} G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\,\mathrm{d}z' \right]\Bigg|_{z=0} \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'$$

$$\left[\int_{z'=-\infty}^{\infty} G(\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}',\omega)\,\mathrm{d}z' \right]\Bigg|_{z=0} = \left[\int_{z'=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0|\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}'|}}{4\pi|\underline{\mathbf{R}}-\underline{\mathbf{R}}'|}\,\mathrm{d}z' \right]\Bigg|_{z=0}$$

$$= \int_{z'=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0|\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{R}}'|}}{4\pi|\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{R}}'|}\,\mathrm{d}z'$$

$$= \frac{\mathrm{j}}{4}\mathrm{H}_0^{(1)}\left(k_0|\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}'|\right)$$

$\mathrm{H}_0^{(1)}(\bullet)$ Hankel function of 1st kind and 0th order / Hankel-Funktion der 1. Art und 0. Ordnung

Scalar 2-D Green's function of free-space / Skalare 2-D Greensche Funktion des Freiraumes

$$G\left(\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}',\omega\right) = \frac{\mathrm{j}}{4}\mathrm{H}_0^{(1)}\left(k_0|\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}'|\right)$$

2-D Versions of EFIE: TM Case / 2D-Versionen von EFIE: TM-Fall

$$\mathrm{E}_z^{\mathrm{sc}}(\underline{\mathbf{r}},\omega) = \mathrm{j}\omega\mu_0 \oint_{\underline{\mathbf{r}}'\in C_{\mathrm{sc}}=\partial S_{\mathrm{sc}}} \mathrm{K}_{\mathrm{e}\,z}^{\mathrm{TM}}(\underline{\mathbf{r}}',\omega)\, G\left(\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}',\omega\right)\mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}', \quad \underline{\mathbf{r}}\in C_{\mathrm{sc}}$$

Scalar 2-D Green's function of free-space / Skalare 2-D Greensche Funktion des Freiraumes

$$G\left(\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}',\omega\right) = \frac{\mathrm{j}}{4}\mathrm{H}_0^{(1)}\left(k_0|\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}'|\right)$$

Integral representation of the scattered field at the scatterer /
Integraldarstellung des Streufeldes auf dem Streuer

$$\mathrm{E}_z^{\mathrm{sc}}(\underline{\mathbf{r}},\omega) = \mathrm{j}\omega\mu_0 \oint_{\underline{\mathbf{r}}'\in C_{\mathrm{sc}}=\partial S_{\mathrm{sc}}} \mathrm{K}_{\mathrm{e}\,z}^{\mathrm{TM}}(\underline{\mathbf{r}}',\omega)\, G\left(\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}',\omega\right)\mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}', \quad \underline{\mathbf{r}}\in C_{\mathrm{sc}}$$

2-D PEC TM EFIE for the z component of the electric field strength /
2D-IEL-TM-EFIE für die z-Komponente der elektrischen Feldstärke

$$\mathrm{E}_z^{\mathrm{sc}}(\underline{\mathbf{r}},\omega) = -\mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{r}},\omega), \quad \underline{\mathbf{r}}\in C_{\mathrm{sc}}$$

Finally we obtain for the 2-D PEC TM EFIE / Schließlich erhalten wir für die 2D-IEL-TM-EFIE

$$\mathrm{j}\omega\mu_0 \oint_{\underline{\mathbf{r}}'\in C_{\mathrm{sc}}=\partial S_{\mathrm{sc}}} \mathrm{K}_{\mathrm{e}\,z}^{\mathrm{TM}}(\underline{\mathbf{r}}',\omega)\, G\left(\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}',\omega\right)\mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}' = -\mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{r}},\omega), \quad \underline{\mathbf{r}}\in C_{\mathrm{sc}}$$

This is a *Fredholm integral equation of the 1. kind* in form of a *closed line integral* for the *unknown* electric surface current density for a *known* incident field. /
Dies ist eine *Fredholmsche Integralgleichung 1. Art* in Form eines *geschlossenen Linienintegrals* für die *unbekannte* elektrische Flächenladungsdichte für ein *bekanntes* einfallendes Feld.

Method of Moments (MoM) – Introduction / Momenten-Methode (MoM) – Einleitung

2-D-PEC-TM-EFIE / 2D-IEL-TM-EFIE

$$\mathrm{j}\omega\mu_0 \oint_{\underline{\mathbf{r}}' \in C_{\mathrm{sc}} = \partial S_{\mathrm{sc}}} \mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}}(\underline{\mathbf{r}}', \omega)\, G\left(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}', \omega\right) \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}' = -\mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{r}}, \omega), \quad \underline{\mathbf{r}} \in C_{\mathrm{sc}}$$

⇓

Linear Operator Equation / Lineare Operatorgleichung

$$\mathcal{L}\{f\} = g$$

⇓ Method of Moments (MoM) / Momentenmethode

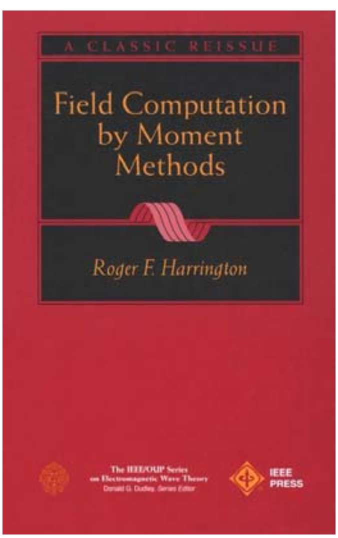
Linear Operator Equation / Lineare Operatorgleichung

$$[\mathbf{L}]\{\mathbf{f}\} = \{\mathbf{g}\}$$

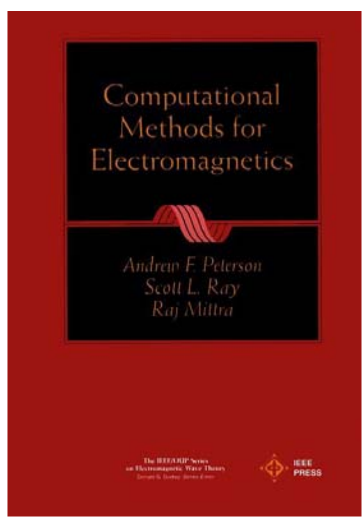
Kantorovich, L. V., G. P. Akilov: *Functional Analysis in Normed Spaces*. Translated by D. E. Brown, Pergamon Press, pp. 586-587, 1964.

Harrington, R. F.: Matrix Methods in Field Problems. *Proc. IEEE*, Vol. 55, No. 2, pp. 136-149, Feb. 1976

Method of Moments (MoM) – Introduction / Momenten-Methode (MoM) – Einleitung



www.amazon.com



www.amazon.com

Method of Moments (MoM) – Linear Operator Equation / Momenten-Methode (MoM) – Lineare Operatorgleichung

Linear Operator Equation / Lineare Operatorgleichung $\mathcal{L}\{f\} = g$

$[\mathbf{A}]\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{b}\}$ (Linear) Matrix Equation / (Lineare) Matrixgleichung

with the Properties / mit den Eigenschaften

- $\mathbb{D}\{\mathcal{L}\}$ is the ***Domain*** of $\mathcal{L}$. / $\mathbb{D}\{\mathcal{L}\}$ ist der **Definitionsbereich** von $\mathcal{L}$.
- $\mathbb{R}\{\mathcal{L}\}$ is the ***Range*** or Co-domain of $\mathcal{L}$. / $\mathbb{R}\{\mathcal{L}\}$ ist der **Wertebereich** von $\mathcal{L}$. /
- $\mathbb{D}$ and $\mathbb{R}$ are **Function Spaces** and $f \in \mathbb{D}$, $g \in \mathbb{R}$. / $\mathbb{D}$ und $\mathbb{R}$ und **Funktionsräume** und $f \in \mathbb{D}$, $g \in \mathbb{R}$.
- The Functional or **Inner Product** is defined by / Das Funktional oder **inneres Produkt** ist definiert durch

$$\langle f_1, f_2 \rangle := \int_{\mathbb{D}} f_1 \, f_2^* \, \mathrm{d}\mathbb{D}$$

"*": Conjugate Complex / „*": konjugiert komplex

Method of Moments (MoM) – Basis Function Expansion / Momenten-Methode (MoM) – Basisfunktionsentwicklung

Linear Operator Equation / Lineare Operatorgleichung $\mathcal{L}\{f\} = g$

Basis Function Expansion / Basisfunktionsentwicklung

Let α_n a Basis in $\mathbb{D}$, i.e. the α_n spans the domain $\mathbb{D}$, then we can represent f in form of series /
Sei α_n eine Basis von $\mathbb{D}$, d.h. die α_n spannen den Raum $\mathbb{D}$ auf, dann lässt sich f in Form einer Reihe darstellen

$$f = \sum_n c_n \, \alpha_n$$

Function / Funktion (f)

Coefficients / Koeffizienten (c_n)

Basis Functions / Basisfunktionen (α_n)

Because of the Linearity of the Operator $\mathcal{L}$ / Wegen der Linearität des Operator $\mathcal{L}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f\} &= \mathcal{L}\left\{\sum_n c_n \, \alpha_n\right\} \\ &= \sum_n c_n \, \mathcal{L}\{\alpha_n\} \\ &= g\end{aligned}$$

Method of Moments (MoM) – Formulation (2) / Momenten-Methode (MoM) – Formulierung (2)

Linear Operator Equation / Lineare Operatorgleichung

$$\mathcal{L}\{f\} = g$$

Testing Procedure: Weighting Functions / Testprozedur: Gewichtungsfunktionen

Let w_m a the weighting functions – Testing Functions – of $\mathbb{R}$, then the following projection theorem holds / Seien w_m die Gewichtungsfunktionen – Testfunktionen – in $\mathbb{R}$, dann gilt der Projektionssatz

$$\left\langle w_m, \mathcal{L}\{f\}\right\rangle = \left\langle w_m, g\right\rangle$$

$$\left\langle w_m, \mathcal{L}\{f\} - g\right\rangle = 0 \qquad \forall m$$

$$\left\langle w_m, \mathcal{L}\left\{\sum_n c_n \alpha_n\right\}\right\rangle = \left\langle w_m, g\right\rangle$$

$$\sum_n c_n \left\langle w_m, \mathcal{L}\{\alpha_n\}\right\rangle = \left\langle w_m, g\right\rangle$$

System of Linear Equations / Linear Gleichungssystem

$$[\mathbf{L}]\{\mathbf{f}\} = \{\mathbf{g}\} \quad \leftrightarrow \quad \sum_n L_{mn} f_n = g_m$$

Method of Moments (MoM) – Selection of Basis and Weighting (Testing) Functions / Momenten-Methode (MoM) – Wahl der Basis- und Gewichtungs(Test)funktionen

Basis Functions are α_n and Weighting Functions (Testing Functions) are w_m / Basisfunktionen sind die α_n und Gewichtungsfunktionen (Testfunktionen) sind die w_m

1. Let $w_m = \alpha_n$ a, then we call this the Method of Galerkin / Sind die $w_m = \alpha_n$, dann sprechen wir von der Galerkin-Methode
2. Let $w_m = \mathcal{L}\{\alpha_m\}$, which results in the Least Square Method. The Method of Moments gives then an approximation with the least quadratic mean value. / Sind die $w_m = \mathcal{L}\{\alpha_m\}$, dann erhält man die Methode der kleinsten Fehlerquadrate. Die Momentan-Methode liefert dann eine Approximation mit dem kleinsten quadratischen Mittelwert.

$$L_{mn} = \left\langle \mathcal{L}\{\alpha_m\}, \mathcal{L}\{\alpha_n\}\right\rangle$$

Now we define a error functional / Nun definieren wir ein Fehlerfunktional

$$r^N := \sum_{n=1}^{N} c_n \alpha_n - g$$

and build the mean quadratic error / und bilden den mittleren quadratischen Fehler

$$\left\langle r^N, r^N\right\rangle$$

then we minimize the error if / so wird der Fehler minimal für

$$w_m = \mathcal{L}\{\alpha_m\}$$

Method of Moments (MoM) – Selection of Basis and Weighting (Testing) Functions / Momenten-Methode (MoM) – Wahl der Basis- und Gewichtungs(Test)funktionen

Basis Functions are α_n and Weighting Functions (Testing Functions) are w_m /
Basisfunktionen sind die α_n und Gewichtungsfunktionen (Testfunktionen) sind die w_m

1. **Entire Domain Basis Functions / Ganzbereichsbasisfunktionen**

   The basis functions α_n are defined over the complete domain $\mathbb{D}$.
   Examples are:

   $$\sin(x), \quad \cos(x), \quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}x}$$

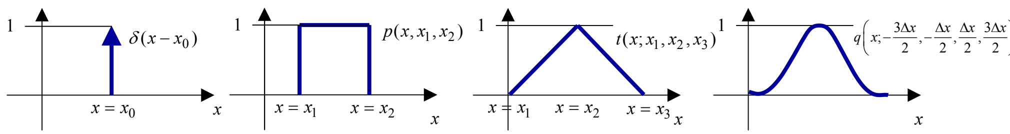
   Die Basisfunktionen α_n sind über den gesamten Definitionsbereich $\mathbb{D}$ definiert.
   Beispiele sind:

   $$\sin(x), \quad \cos(x), \quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}x}$$

2. **Subdomain Basis Functions / Unterbereichsbasisfunktionen**

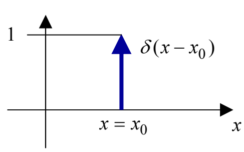
   The basis functions α_n are defined over subdomain of the domain $\mathbb{D}$.
   Examples are: Delta Function, Rectangular Pulse (or Piecewise-Constant) Function, Triangular Pulse Function, Quadratic Spline Function

   Die Basisfunktionen α_n sind über einen Unterbereich des Bereichs $\mathbb{D}$ definiert.
   Beispiele sind: Delta-Funktion, Rechteckimpuls-Funktion, Dreieckimpuls-Funktion, Quadratische Spline Funktion



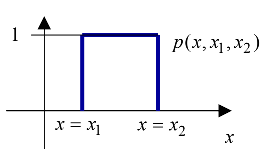
Method of Moments (MoM) – Selection of Basis and Weighting (Testing) Functions / Momenten-Methode (MoM) – Wahl der Basis- und Gewichtungs(Test)funktionen

Delta Function / Delta-Funktion



$$B_0(x) = \delta\left(x - x_0\right)$$

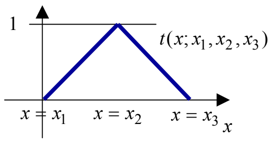
Rectangular Pulse (or Piecewise-Constant) Function / Rechteckimpuls-Funktion (oder stückweise konstante Funktion)



$$B_1(x) = p\left(x; x_1, x_2\right) = \begin{cases} 1 & x_1 \le x \le x_2 \\ 0 & \text{otherwise / sonst} \end{cases}$$

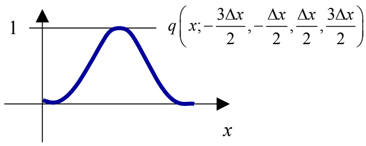
Method of Moments (MoM) – Selection of Basis and Weighting (Testing) Functions / Momenten-Methode (MoM) – Wahl der Basis- und Gewichtungs(Test)funktionen

Triangular Pulse Function / Dreieckimpulsfunktion



$$B_2(x) = t(x; x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} & x_1 \le x \le x_2 \\ \dfrac{x_3 - x}{x_3 - x_2} & x_2 < x \le x_3 \text{ sonst} \\ 0 & \text{otherwise / sonst} \end{cases}$$

Quadratic Spline Function / Quadratische Spline-Funktion



$$B_2(x) = q\left(x; -\frac{3\Delta x}{2}, -\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta x}{2}, \frac{3\Delta x}{2}\right) = \begin{cases} 0 & x < -\dfrac{3\Delta x}{2} \\ \dfrac{9}{8} + \dfrac{3x}{2\Delta x} + \dfrac{x^2}{2(\Delta x)^2} & -\dfrac{3\Delta x}{2} \le x < -\dfrac{\Delta x}{2} \\ \dfrac{3}{4} - \dfrac{x^2}{(\Delta x)^2} & -\dfrac{\Delta x}{2} \le x < \dfrac{\Delta x}{2} \\ \dfrac{9}{8} - \dfrac{3x}{2\Delta x} + \dfrac{x^2}{2(\Delta x)^2} & \dfrac{\Delta x}{2} \le x < -\dfrac{3\Delta x}{2} \\ 0 & x > \dfrac{3\Delta x}{2} \end{cases}$$

Method of Moments (MoM) – Example: Solution of a 1-D Boundary Value Problem / Momenten-Methode (MoM) – Beispiel: Lösung eines 1D-Randwertproblems

Given is the boundary value problem / Gegeben ist der Randwertproblem

$$-\frac{d^2}{dx^2} f(x) = 1 + 4x^2$$

$f(x)$ continuous for $x = [0, 1]$
Boundary conditions: $f(0) = f(1) = 0$ /
$f(x)$ stetig für $x = [0, 1]$
Randbedingungen: $f(0) = f(1) = 0$

Determine / Bestimme $\quad f(x) = ?$

Basis Function Expansion / Basisfunktionsentwicklung

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \, \alpha_n(x)$$

Basis Functions / Basisfunktionen

$$\alpha_n(x) = x - x^{n+1}$$

Ensures the Boundary conditions / Erfüllt die Randbedingungen

$$\alpha_n(0) = \alpha_n(1) = 0$$

Inner Product / Inneres Produkt

$$\langle f(x), g(x) \rangle := \int_{x=0}^{1} f(x)\, g(x)\, dx \quad \Leftarrow \quad \langle f_1, f_2 \rangle := \int_{\mathbb{D}} f_1 f_2^* \, d\mathbb{D}$$

$$\mathbb{D} \rightarrow x = [0, 1]$$

Method of Moments (MoM) – Example: Solution of a 1-D Boundary Value Problem / Momenten-Methode (MoM) – Beispiel: Lösung eines 1D-Randwertproblems

$$w_m(x) = \mathcal{L}\{\alpha_m(x)\}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$$

Testing Functions / Testfunktionen

$$\begin{aligned} w_m(x) &= \mathcal{L}\left\{x - x^{m+1}\right\} \\ &= -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(x - x^{m+1}\right) \\ &= m(m+1)x^{m-1} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\{f\} = g$$

$$\left\langle w_m(x), \mathcal{L}\{f(x)\}\right\rangle = \left\langle w_m(x), g(x)\right\rangle$$

$$g(x) = 1 + 4x^2$$

Method of Moments (MoM) – Example: Solution of a 1-D Boundary Value Problem / Momenten-Methode (MoM) – Beispiel: Lösung eines 1D-Randwertproblems

$$\left\langle w_m(x), \mathcal{L}\{f(x)\}\right\rangle = \left\langle w_m(x), g(x)\right\rangle$$

$$\begin{aligned} \left\langle w_m(x), \mathcal{L}\{f(x)\}\right\rangle &= \left\langle m(m+1)x^{m-1}, -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\sum_{n=1}^{N} c_n (x - x^{n-1})\right\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{N} c_n \left\langle m(m+1)x^{m-1}, n(n+1)x^{n-1}\right\rangle \\ &= m(m+1)\sum_{n=1}^{N} n(n+1)c_n \int_{x=0}^{1} x^{m-1}x^{n-1}\,\mathrm{d}x \\ &= m(m+1)\sum_{n=1}^{N} \frac{n(n+1)}{m+n-1}c_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle w_m(x), g(x)\right\rangle &= \left\langle m(m+1)x^{m-1}, (1+4x^2)\right\rangle \\ &= \int_{x=0}^{1} m(m+1)x^{m-1}(1+4x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= m(m+1)\int_{x=0}^{1} (x^{m-1} + 4x^{m+1})\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{(5m+1)(m+1)}{m+2} \end{aligned}$$

$$[\mathbf{L}]\{\mathbf{f}\} = \{\mathbf{g}\} \qquad \sum\nolimits_n L_{mn} f_n = g_m$$

$$\begin{aligned} L_{mn} &= m(m+1)\frac{n(n+1)}{m+n-1} \\ f_n &= c_n \\ g_m &= \frac{(5m+1)(m+1)}{m+2} \end{aligned}$$

Method of Moments (MoM) – Example: Solution of a 1-D Boundary Value Problem / Momenten-Methode (MoM) – Beispiel: Lösung eines 1D-Randwertproblems

$N = 1$

$$L_{11} = 4$$

$$g_1 = \frac{14}{3}$$

$$f_1 = c_1 = \frac{7}{6}$$

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{1} c_n \alpha_n(x) = \sum_{n=1}^{1} c_n (x - x^{n+1}) = \frac{7}{6}(x - x^2)$$

$$\mathcal{L}\{f_1(x)\} = \frac{7}{3} \neq 1 + 4x^2$$

$N = 2$

$$[\mathbf{L}] = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\{\mathbf{g}\} = \begin{Bmatrix} \frac{14}{3} \\ 9 \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathbf{f}\}_2 = \{\mathbf{c}\}_2 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \end{Bmatrix}$$

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{2} c_n \alpha_n(x) = \sum_{n=1}^{2} c_n (x - x^{n+1}) = \frac{1}{6}(x - x^2) + \frac{2}{3}(x - x^3) = \frac{5}{6}x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x^3$$

$$\mathcal{L}\{f_2(x)\} = \frac{1}{3} + 4x \neq 1 + 4x^2$$

Method of Moments (MoM) – Example: Solution of a 1-D Boundary Value Problem / Momenten-Methode (MoM) – Beispiel: Lösung eines 1D-Randwertproblems

$N = 3$

$$[\mathbf{L}] = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 6 & 12 & 18 \\ 8 & 18 & \frac{144}{5} \end{bmatrix}$$

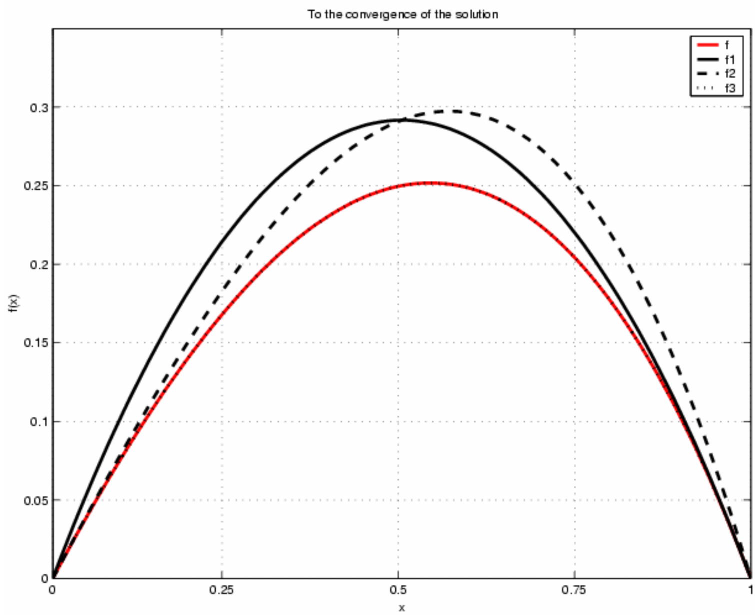
$$\{\mathbf{g}\} = \begin{Bmatrix} \frac{14}{3} \\ 9 \\ \frac{68}{5} \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathbf{f}\}_3 = \{\mathbf{c}\}_3 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{Bmatrix}$$

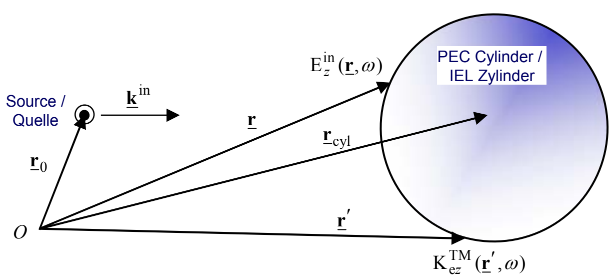
$$f_3(x) = \sum_{n=1}^{3} c_n \alpha_n(x) = \sum_{n=1}^{3} c_n (x - x^{n+1}) = \frac{1}{2}(x - x^2) + \frac{1}{3}(x - x^4) = \frac{5}{6}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^4$$

$$\mathcal{L}\{f_3(x)\} = 1 + 4x^2$$

Method of Moments (MoM) – Example: Solution of a 1-D Boundary Value Problem / Momenten-Methode (MoM) – Beispiel: Lösung eines 1D-Randwertproblems



EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Impuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen



2-D Case / 2D-Fall

$$\underline{\mathbf{R}} = \underbrace{r\underline{\mathbf{e}}_r(\varphi)}_{=\underline{\mathbf{r}}} + \underbrace{z\underline{\mathbf{e}}_r(\varphi)}_{=\underline{\mathbf{0}}} = \underline{\mathbf{r}}$$

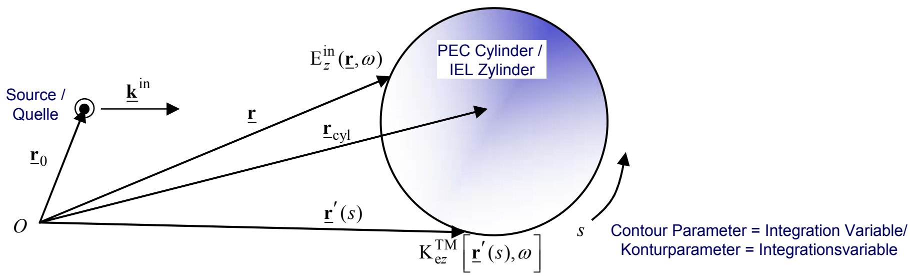
2-D PEC TM EFIE / 2D-IEL-TM-EFIE

$$\mathrm{j}\omega\mu_0 \oint_{\underline{\mathbf{r}}' \in C_{\mathrm{sc}} = \partial S_{\mathrm{sc}}} \mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}}(\underline{\mathbf{r}}',\omega)\, G\left(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}',\omega\right) \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}' = -\mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{r}},\omega), \quad \underline{\mathbf{r}} \in C_{\mathrm{sc}}$$

This is a *Fredholm integral equation of the 1. kind* in form of a *closed line integral* for the *unknown* electric surface current density for a *known* incident field. / Dies ist eine *Fredholmsche Integralgleichung 1. Art* in Form eines *geschlossenen Linienintegrals* für die *unbekannte* elektrische Flächenladungsdichte für ein *bekanntes* einfallendes Feld.

$$G(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}',\omega) = \frac{\mathrm{j}}{4}\mathrm{H}_0^{(1)}\left(k_0\left|\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}'\right|\right)$$

EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Impuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen



$$\underline{\mathbf{r}}' \to \underline{\mathbf{r}}'(s)$$

$$K_{ez}^{\mathrm{TM}}(\underline{\mathbf{r}}',\omega) \to K_{ez}^{\mathrm{TM}}\left[\underline{\mathbf{r}}'(s),\omega\right] \qquad \underline{\mathbf{r}}'(s) \in C_{\mathrm{sc}} \qquad C_{\mathrm{sc}} : s_b \le s \le s_e$$

$$G\left(\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}',\omega\right) \to G\left(\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}'(s),\omega\right)$$

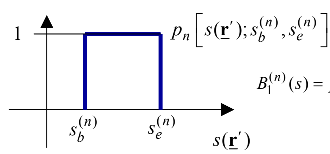
$$E_z^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{r}},\omega) = -\mathrm{j}\omega\mu_0 \int_{s=s_b}^{s_e} G\left[\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}'(s),\omega\right] K_{ez}^{\mathrm{TM}}\left[\underline{\mathbf{r}}'(s),\omega\right] \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'(s) \qquad \underline{\mathbf{r}} \in C_{\mathrm{sc}}$$

EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Rectangular Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Rechteckimpuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen

$$E_z^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{r}},\omega) = -\mathrm{j}\omega\mu_0 \int_{s=s_b}^{s_e} G\left[\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}'(s),\omega\right] K_{ez}^{\mathrm{TM}}\left[\underline{\mathbf{r}}'(s),\omega\right] \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'(s) \qquad \underline{\mathbf{r}} \in C_{\mathrm{sc}}$$

Basis Function Expansion using Rectangular Pulse Basis / Basisfunktionsentwicklung mit Rechteckimpulsfunktionen

Rectangular Pulse (or Piecewise-Constant) Function / Rechteckimpuls-Funktion (oder stückweise konstante Funktion)



$$B_1^{(n)}(s) = p^{(n)}\left[s(\underline{\mathbf{r}}'); s_b^{(n)}, s_e^{(n)}\right] = \begin{cases} 1 & s_b^{(n)} \le s \le s_e^{(n)} \\ 0 & \text{otherwise / sonst} \end{cases}$$

$$K_{ez}^{\mathrm{TM}}\left[\underline{\mathbf{r}}'(s),\omega\right] \approx \sum_{n=1}^{N} K_{ez}^{\mathrm{TM}(n)}(\omega)\, p^{(n)}\left[s(\underline{\mathbf{r}}'); s_b^{(n)}, s_e^{(n)}\right]$$

$$E_z^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{r}},\omega) \approx -\mathrm{j}\omega\mu_0 \sum_{n=1}^{N} K_{ez}^{\mathrm{TM}(n)}(\omega) \int_{s=s_b}^{s_e} G\left[\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}'(s),\omega\right] p^{(n)}\left[s(\underline{\mathbf{r}}'); s_b^{(n)}, s_e^{(n)}\right] \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'(s) \qquad \underline{\mathbf{r}} \in C_{\mathrm{sc}}$$

$$\approx -\mathrm{j}\omega\mu_0 \sum_{n=1}^{N} K_{ez}^{\mathrm{TM}(n)}(\omega) \int_{s=s_b^{(n)}}^{s_e^{(n)}} G\left[\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}'(s),\omega\right] \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'(s)$$

EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Impuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen

$$\mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{r}},\omega) \approx -\mathrm{j}\omega\mu_0 \sum_{n=1}^{N} \mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}(n)}(\omega) \int_{s=s_b^{(n)}}^{s_e^{(n)}} G\left[\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}'(s),\omega\right] \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'(s)$$

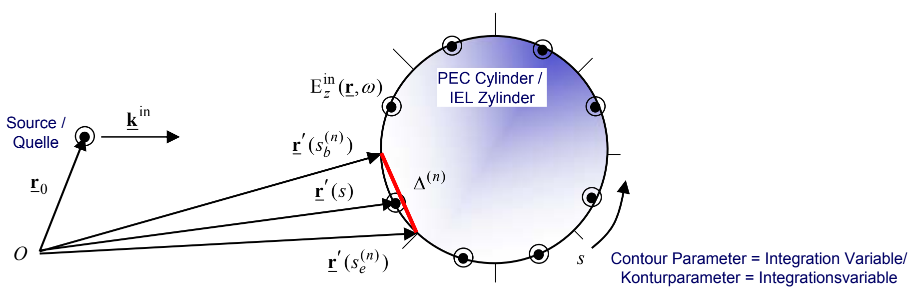
$$G\left[\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}'(s),\omega\right] = \frac{\mathrm{j}}{4}\mathrm{H}_0^{(1)}\left[k_0\left|\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}'(s)\right|\right]$$

$$\mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{r}},\omega) \approx -\mathrm{j}\omega\mu_0 \sum_{n=1}^{N} \mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}(n)}(\omega) \int_{s=s_b^{(n)}}^{s_e^{(n)}} \frac{\mathrm{j}}{4}\mathrm{H}_0^{(1)}\left[k_0\left|\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}'(s)\right|\right] \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'(s)$$

$$\approx \frac{\omega\mu_0}{4} \sum_{n=1}^{N} \mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}(n)}(\omega) \int_{s=s_b^{(n)}}^{s_e^{(n)}} \mathrm{H}_0^{(1)}\left[k_0\left|\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}'(s)\right|\right] \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'(s)$$

$$\int_{s=s_b^{(n)}}^{s_e^{(n)}} \mathrm{H}_0^{(1)}\left[k_0\left|\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}'(s)\right|\right] \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'(s) = ?$$

EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Impuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen



$$\Delta^{(n)} = \left|\underline{\mathbf{r}}'(s_b^{(n)}) - \underline{\mathbf{r}}'(s_e^{(n)} s)\right|$$

$$\int_{s=s_b^{(n)}}^{s_e^{(n)}} \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'(s) \approx \left|\underline{\mathbf{r}}'(s_b^{(n)}) - \underline{\mathbf{r}}'(s_e^{(n)} s)\right|$$

$$= \Delta^{(n)}$$

EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Impuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen

Power Series Approximation of the Main Diagonal Elements / Potenzreihenapproximation der Hauptdiagonalelemente

$$\mathrm{H}_0^{(1)}(z) = \mathrm{J}_0(z) + \mathrm{j}\mathrm{N}_0(z) ?$$

End of 3rd Lecture / Ende der 3. Vorlesung